DE

Principiis & Ratiocinatione GEOMETRARUM.

Ubi oſtenditur incertitudinem falſitatemq; non minorem ineſſe ſcriptis eorum, quam ſcriptis Phyſicorum & Ethicorum.

Contra faſtum Profeſſorum Geometriæ.

LONDINI,
Apud *Andream Crooke* in Cœmiterio *D. Pauli* ſub ſigno Draconis viridis. 1666.

Ad Illustrissimum Dominum D. Henricum Bennet Baronem de Arlington, Serenissimo Regi Carolo II. a Consiliis, & Secretarium primarium.

CUm senectutis meæ solatium maximum tuæ (Illustrissime Domine) opi debeam, ingratus essem nisi tantæ gratiæ vestigium aliquod etsi obscurum extare curarem. Quod cum alia non possum, vulgata via Scholarium facio, Dedico tibi libellum, non male moratum, sed tamen audaculum; Geometrarum enim totam invadit nationem. Quid (inquies) si injustè? Mihi quidem id dedecus magnum

esset, sed quod ad te, qui ad altiora institutus es, quemq; morum & officii mei erga teipsum, non nugarum mearum inspectorem facio, non pertinebit. In magno quidem periculo versari video existimationem meam, qui a Geometris fere omnibus dissentio. Eorum enim qui de iisdem rebus mecum aliquid ediderunt, aut solus insanio ego aut solus, non insanio; tertium enim non est, nisi (quod dicet forte aliquis) insaniamus omnes. Cæterùm sine Iudice lis est, nisi quòd Iudicem aliquando seipsam constituet nondum imbuta posteritas. Videri tibi interea vir bonus, etsi pessimus Geometra, satis habeo. Deum precor ut te optimo Regi, ministrum optimum diutissime conservare velit.

Servorum tuorum humillimus,

Tho. Hobbes.

ERRATA.

PAg. 31. l. 9. pro *duplæ*, lege *dupla:* l. 10. pro *duplicatæ*, lege *duplicata*. pag. 42. l. 31. dele *in*: pag. 49. l. 3. pro *ſibi* lege *tibi:* pag. 55. l. 12. pro *arcuum* lege *arcum:* l. 21. pro 4. lege 47. pag. 58. l. 23. pro 4000. lege 400. pag. 59. l. 18. pro 4. lege 47. pag. 60. l. 6. pro *CN*, lege *BN:* l. 7. pro *BNgk*, lege *BNgh*.

Contra Geometras.

Ontra Geometras (amice Lector) non contra Geometriam hæc ſcribo. Artem ipſam, artium Navigandi, Ædificandi, Pingendi, Computandi, & denique (ſcientiæ omnium nobiliſſimæ) Phyſicæ matrem, æquè ac qui maximè, laudibus extollendam cenſeo.

Cæterùm ubi Geometræ Encomiis artis quam profitentur (imperitè an aſtutè neſcio) ſuas ipſorum laudes immiſcent, licitum mihi (puto) erit, diſtinguere. Quomodo autem Scientiam hanc laudare ſoleant Magiſtri ejus, ex uno *Clavio* intelligere poſſumus, laudante illam in Prolegomenis ad *Euclidem*, hoc modo.

Si vero Nobilitas atq; præſtantia Scientiæ ex certitudine demonſtrationum quibus utitur, ſit judicanda; haud dubiò Mathematicæ diſciplinæ inter cæteras omnes principem habebunt locum. Demonſtrant enim omnia, de quibus ſuſcipiunt diſputationem firmiſſimis rationibus, confirmantq;, ita ut verè ſcientiam in auditoris animo gignant, omnemq; prorſus dubitationem tollant: Id quod aliis ſcientiis vix tribuere, &c. Et paulo infrà:

Diſciplinæ Mathematicæ veritatem adeo expetunt, adamant, excoluntque, ut non ſolum nihil, quod ſit falſum, verum etiam nihil, quod tantum probabile exiſtit, nihil denique admittant, quod certiſſimis demonſtrationibus non confirmant.

Quibus verbis (quia *Sciens*, non *Scientia* demonſtrat) non artem ipſam, ſed magiſtros laudat: Certitudo Scientiarum omnium æqualis eſt, alioqui enim Scientiæ non eſſent, cum Scire non ſuſcipiat magis & minus. Phyſica, Ethica, Politica ſi bene demonſtratæ eſſent non minus certæ eſſent quam Pronunciata Mathematica, ſicut nec Mathematica Scientiis aliis certior eſſet, niſi rectè demonſtrarentur ea quæ pronuntiat.

Itaq; per hanc Epiſtolam hoc ago, ut oſtendam tibi non minorem eſſe dubitandi cauſam in Scriptis Mathematicorum quam in Scriptis Phyſicorum, Ethicorum, &c.

Omitto inter Geometras diſſentiones & mutua convitia, quæ ſignum certiſſimum Ignorantiæ ſunt. Ipſa aggredior Principia, & interdum etiam Demonſtrationes. Sive enim Principia falſa ſint, ſive illatio neceſſaria non ſit, demonſtratio nulla eſt. Pro Geometris autem omnibus oppugnabo *Euclidem*, qui omnium Geometrarum Magiſter exiſtimatur, & interpretem ejus omnium optimum *Clavium*.

Itaq; primo loco examinabo *Euclidis* Principia: ſecundo, ea quæ principiis illis innitentia videntur mihi eſſe falſa; ſive ea ſint *Euclidis*, ſive *Clavii*, ſive cujuſcunque Geometræ, qui Principiis illis, vel aliis falſis uſi ſunt; atq; ita oppugnabo ut meliora rejectis ſubſtituam, ne artem ipſam videar labefactare velle.

CAP. I.

De Puncto.

DEfinitio *Euclidis* prima, *Puncti* eſt, hæc! *Punctum* (Σημεῖον) *eſt, cujus pars nulla eſt.*

Quid Definitione hac intellexit *Euclides* difficile eſt ſcire. Signum enim, quatenus Signum, Nomen Quanti non eſt, ſed Relationis, quanquam quicquid ſit quod in Signum alicujus rei ſtatuas viſibile, neceſſariò corpus ſit, & proinde Quantum etiam & Diviſibile eſt, & partem habere poteſt. Etiam verba illa *cujus pars eſt nulla*, dupliciter intelligi poſſunt, aut pro

Indiviſo

Indiviso (Pars enim non intelligitur, nisi ubi præcesserit divisio) vel pro Indivisibili, quod per naturam suam divisionis est incapax. In priori sensu Punctum quantitas rectè dicitur; in posteriore non item; cum omnis quantitas divisibilis sit in semper divisibilia. Itaque si punctum sit indivisibile, carebit Linea omni latitudine; &,quia nihil est longum quod non habeat latitudinem, erit linea planè Nihil. Quanquam enim Longitudo Lata non sit, Longum tamen omne Latum est. Videtur etiam *Euclidem* ipsum in ea opinione fuisse, Punctum quanquam partem actu non habeat, potentia tamen divisibile esse, & quantitatem; alioqui non postulasset a *puncto* ad *punctum* duci posse Lineam rectam. Quod impossibile est, nisi Linea habeat latitudinem aliquam. Verum sive ita senserit *Euclides*, sive aliter; manifestum est Punctum divisibile esse ex eo, quod sectâ Lineâ in duas partes, habebit utraque pars duos Terminos, id est duo Puncta extrema, & per consequens Punctum Dividens secatur (si quantitas sit) in duas quantitates; si nihil sit, in duo nihila. Etiam circulus secari potest in Sectores quotcunque, & proinde (cum omnis Sector desinat in Punctum) secabitur quoque Centrum in totidem Puncta, partes totidem Centri; sive Centrum illud quantitas sit, sive Nihil.

Definitio ergo *Puncti* apud *Euclidem*, quemadmodum eam intelligunt Geometræ post *Euclidem* omnes, vitiosa est. Quam tamen si nullum in Geometria errorem peperisset, præteriissem.

Definitio *Puncti* vera, & quæ vitium nullum in demonstrationes illatura sit, talis esse debet; *Punctum est divisibile quidem, sed cujus pars nulla in Demonstratione consideranda est*, id est considerandum est, non ut Punctum (quod Græcè νυγμὴ dicitur) neque ut στιγμὴ (quæ Græcè est distinctio visibilis) quæ ambo Quanta sunt; sed ut Signum (quod Græcè est Σημεῖον, quo verbo utitur *Euclides*). Signum enim, quanti nomen non est.

Est enim *Geometria*, *scientia qua ex aliqua vel aliquibus mensuratis per ratiocinationem determinamus quantitates alias non mensuratas*. Rectè igitur incepit *Euclides* a definitione *Mensuræ*,

ſuræ, qua menſurantur longitudines, & primo loco *menſuræ* illius terminum definiit, & *Signum* eſſe dixit. Sed cujus rei Signum? Signum a quo Menſuræ terminus unus aut alter menſurato applicatur.

Præterea ſi *Punctum* indiviſibile eſſet, id eſt Non-quantum, id eſt nihil, ſequeretur (ſuppoſito, ut nunc ſupponunt ſcriptores Mathematici, quantitatem dividi in infinitum, ut punctum ſit pars lineæ infinitè exigua) partem infinitè exiguam lineæ rectæ, & quadratum quod ſit minima pars Quadrati, & Cubum qui ſit minima pars Cubi, eſſe inter ſe æqualia.

Cap. II.

De Linea.

Lineam definit *Euclides Longitudinem eſſe, ſine Latitudine.* Scilicet conformatur hæc ad Definitionem puncti, & propterea eadem omnia habet vitia. Nam ut Centrum circuli dividitur a ſectoribus in partes quotlibet, ita etiam ſectorum latera dividuntur ſecundum Latitudinem. Nam ſi Sector quilibet dividatur in duos ſectores, quorum unus apud te eſſet, alter apud me, haberet uterque duo latera & propterea ſive Latus illud medium habeat Latitudinem, ſive non-Latitudinem, erit diviſum in duas ſuperficies vel in duas non-ſuperficies. Itaque omni modo linea eſt diviſibilis.

Linea ab aliis definitur *Puncti moti veſtigium*, ſive Via. De qua definitione *Clavius* ſic loquitur. *Mathematici quoq; ut nobis inculcent veram Lineæ intelligentiam, imaginantur Punctum jam deſcriptum ſuperiori definitione, e loco in locum moveri. Cum enim punctum ſit prorſus individuum, relinquetur ex eo motu imaginario veſtigium quoddam longum omnis expers Latitudinis.* Vide Mathematicorum, qui ſubtiliores multo ſunt, quam qui operam dederunt ſtudiis cæterarum artium, *Clavium* ſubtiliſſimum, ſcribentem, hoc loco, *veſtigium relinqui longum a motu ejus quod nullum habet Latitudinem*, id eſt a motu Nihili. Sciunt tamen omnes, nihil moveri præter corpus, neq; motum concipi

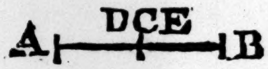
niſi

nisi corporis posse. Sed corpus omne motum, vestigium relinquit non modo longum, sed etiam latum. Definitio igitur lineæ debebat esse hujusmodi. *Linea est vestigium quod relinquitur a motu corporis, cujus quantitas non consideratur in demonstratione.*

Cap. III.

De Termino.

DEfiniuntur tertio loco, Lineæ Termini, hoc modo. *Lineæ Termini sunt Puncta.* Quam definitionem non reprehendo; sed ut ab ea, id quod antè dixi, nimirum Punctum non esse indivisibile, sed tantum in demonstratione non ut divisum considerari, inde ostendam. Si enim Linea secetur in Puncto bifariam, cum utraq; habeat duos Terminos, sitq; Punctum illud, in quo dividitur Linea, omnino nihil, duæ partes a divisione factæ se mutuò tantùm tangerent nec haberent ullum Punctum commune. Et proinde Terminus extremus magis distabit a Termino alterius Lineæ ad quod est Punctum dividens, quam a sui ipsius Termino altero ad quem itidem ponitur idem Punctum dividens, id est, major est una partium quam altera, & proinde Linea illa divisa non est bifariam ut supponebatur. Exempli gratia. Lineâ A B sectâ bifariam in C, partes ejus se tangunt tantum ad C, & earum cujusque Termini (cum sint duæ Lineæ) sunt omnes quatuor; quare ad C erunt duo Termini, qui sint D et E, & per consequens, BD major est quam AC; non est ergo AB divisa bifariam in C nisi D, C, E considerentur ut idem Punctum.



Cap. IV.

De Linea Recta.

DEfinitio quarta est, *Lineæ rectæ, talis. Linea recta est quæ ex æquo sua interjacet Puncta.* Id est (interprete *Clavio*) In qua nullum Punctum intermedium ab extremis sursum aut deorsum, huc vel illuc deflectendo subsultat, in qua deniq; nihil flexuosum reperitur. Non agnosco hic orationem Mathematicorum. Quomodo Punctum subsultet sursum & deorsum, huc & illuc non intelligo, non tamen credo quemquam esse qui rem ipsam, Lineam (inquam) rectam animo suo non satis rectè concipiat, ideâ nata ab aliqua Linea recta materiali, quanquam ideas suas, non omnes homines possunt oratione æquè declarare. Sed neq; contra, illi qui cogitata sua optimè describunt, sunt semper optimi Mathematici. Definire enim vocabula Artis cujuscunq; non est ipsius Artis, neq; forte omnino artis opus, sed partim Judicii Naturalis, quo distinguitur inter cujusq; rei Essentialia, & non Essentialia, partim Ingenii ad inveniendum verba & orationem prompti, quibus ea quæ Essentialia sunt propriè & adæquatè significentur. Itaq; diversi homines eandem habentes ideam Lineæ Rectæ, non tamen eandem ejus definitionem assignaverunt. Indicat nobis hoc loco *Clavius* plurium doctorum hominum, *Lineæ Rectæ* definitiones. Primo loco *Procli*, nempe, Recta est quæ tantum præcisè occupat spatium, quanta est distantia inter Puncta ejus extrema. Secundo, *Platonis*, Recta est cujus intermedia Puncta obumbrant extrema. 3°. *Archimedis*, Recta est minima habentium terminos eosdem. 4°. *Campani*, Recta est brevissima a puncto ad punctum extensio. 5°. Eorum qui dicunt, Rectam esse, quæ describitur a Puncto moto nec vacillante. Quibus ego addo aliam Authoris recentioris, Recta est cujus termini, salva quantitate, diduci non possunt.

Quarum definitionum quænam sit cæteris præferenda, ex duabus rebus judicandum est, Idea, & Usu. Ex Idea an vera sit; ex Usu, an Principium Demonstrandi Idoneum sit. Idea

juxta

juxta quam definita est a *Platone* Linea recta, Imago erat projectæ ab ea Umbræ, quam quidem projici vidit per rectam. Itaq; quid sit Recta satis conceperat; sed definitio illa planè sterilis est, nec ullius usus ad demonstrandum utrum Linea de qua quæritur, recta sit necne, neq; ad demonstrandam rationem rectæ ad curvam. *Procli*, *Archimedis*, & *Campani* definitiones verbis quidem differunt, idem autem significant, nempe Rectam esse, quæ inter eosdem terminos est brevissima, quæ orta est ab Idea visarum plurium Linearum conterminarum, quarum unica visa est recta & brevissima. Atq; hac definitione utitur *Archimedes*. Quis enim qui conceperit in Sphæra plures circulos Meridianos & Axem unicum, non judicabit Axem tum rectam esse Lineam tum brevissimam aliarum omnium quæ transeunt a Polo ad Polum. Idea unde nata videtur esse definitio ultima erat quod videret Extensionem nihil aliud esse præter diductionem extremorum Punctorum; contraq; Incurvationem nihil aliud esse quam adductionem terminorum eorundem. Quod Rectam definiunt *Vestigium Puncti moti nec vacillantis* a nulla Idea ortum est, nec oriri potuit; quia vacillare nihil dici potest, nisi respectivè ad Vestigium Lineæ jam antè ductæ. Neq; videtur magis vacillare Punctum dum describit circumferentiam circuli, quam dum describit Lineam rectam.

At definitio *Euclidis* omnino est insignificans. Quis enim intelligat quo modo Puncta media Lineæ, ex æquo jacent inter extrema?

Quo argumento ostensum est Punctum non esse sua natura, sed solummodo ut consideratum in demonstrationibus, indivisibile, eodem demonstrari potest, Lineam non esse sua natura sine Latitudine, sed solummodo quatenus considerata est inter demonstrandum.

Cap. V.

De Superficie.

DEfinitio quinta, *Superficies est quæ Longitudinem Latitudinemq; habet*, iisdem omnibus laborat vitiis cum definitione Lineæ; cum (exempli gratiâ) bases duorum hemisphæriorum duæ sunt, sive hemisphæriorum illorum alterum sit apud Indos Orientales, alterum apud Occidentales, sive se mutuò contingant. Dividitur ergo unà cum Spherâ etiam maximus ejus circulus, id est dividitur secundum Profunditatem. Profunda ergo est superficies quæ basis est hemisphærii.

Cap. VI.

De Superficiei Terminis.

DEfinitio sexta, *Superficiei Termini sunt Lineæ*, probat (divisa Superficie) duos ejus Terminos, id est duas Lineas esse extremas utriusq; partis, & (per consequens) Lineam dividi posse bifariam ab uno ejus extremo ad alterum.

Cap. VII.

De Superficie Plana.

DEfinitio septima est, *Plana Superficies est, quæ ex æquo interjacet suas Lineas*, quam *Clavius* exponens oratione nihil significante, simili ejus qua usus est in explicanda definitione Lineæ Rectæ, *Plana* (inquit) *est Superficies, in qua partes omnes in rectum collocatæ sunt, ita ut nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum.* Quæ verba ab omni arte aliena, ne ipse quidem potuit intelligere. Quod autem partes Plani omnes in rectum collocatas esse dicat,

cat, impossibile est nisi Planum totum sit una Linea Recta; quod item Superficiem Planam talem esse dicit qualis est Superficies perpoliti alicujus marmoris, verum non est, nisi Conus aut Sphæra marmorea non potest perpoliri æquè ac Superficies Plana. Rem quidem ipsam & *Euclides*, & *Clavius* & omnes homines satis rectè concipiunt, sed quæ Superficiei Planæ essentialia sunt, verbis explicare, saltem facile, non omnes possunt. Si Superficiem Planam esse dixeris, quæ describitur a Linea ita mota, ut singula ejus Puncta rectas Lineas describant, rectè eam definieris, & clarè, & Essentiæ ipsius consentaneè.

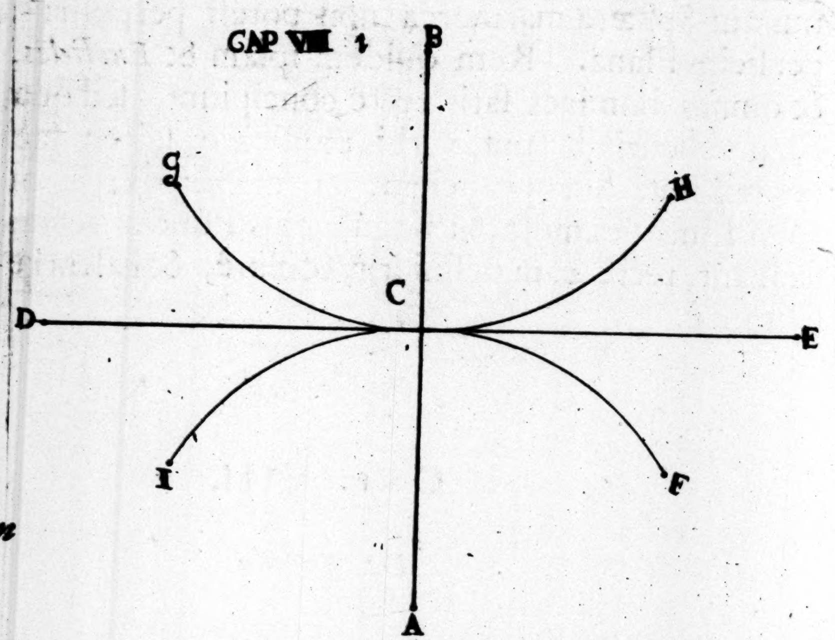
Cap. VIII.

De Angulo.

Definitio 8. *Angulus Planus, est duarum Linearum in Plano se mutuò Tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.* Ideam sive imaginem Anguli, de quo tam multa dicuntur a Geometris, impressam animo, pauci habent. Quicquid maxima ex parte in Superficie late patens, desinit in angustum, dicitur vulgò Angulus. Talem Ideam Anguli, etiam *Euclides* a conspectis duabus Lineis concurrentibus conceptam, videtur voluisse hoc loco verbis declarare; neq; (ut videtur) omnino cogitaverat aut audiverat quicquam de Angulo Contactus. Quanquam enim El. 3°. Prop. 16. Conatur demonstrare Angulum factum a Tangente & circumferentia Circuli, minorem esse omni angulo acuto, nusquam tamen nominat Angulum Contactus, neq; de illo, sub alio quovis nomine, quicquam dicit. Itaq; non videtur voluisse comprehendere hac definitione Angulum Planum ullum, qui non fuerit ejusdem generis cum angulo Rectilineo. Quod etiam ex eo colligi potest quod ad anguli definitionem, necessariam putaverit esse conditionem, ne *Lineæ quæ angulum efficiunt jaceant in directum.* Verum quid voluisse

luisse videtur *Euclides*, conjicere frustrà erit, Ipsam Definionem verbatim consideremus.

Quod ut melius faciamus (cum sit res satis magni Mathematicis momenti, quæque magnas inter *Clavium* & *Pelletarium* contentiones excitavit) rem totam descripta figura ponamus ante oculos.



Sit recta AB divisa bifariam in C, & Radiis AC, BC describantur duo circuli FI, GH; secetq; recta ED rectam AB ad angulos rectos in C.

Videamus primò, quænam sint duæ Lineæ quæ angulum constituunt; & quæ duæ angulum non constituunt. Rectæ DC, CE absq; dubio constituunt compositæ, unam rectam DE. Sed an item rectæ AC, CE constituant unam Lineam curvam incertum est; imò verò certum potius quod non. Nam punctum C considerabitur vel ut Quantum, vel ut Nihil. Si ut Nihil neq; Linea DE, neq; Linea FI duci potest, neq; considerari. Sin punctum consideretur ut quantum, considerabitur recta quidem DE ut rectangulum, & arcus FI ut orbis, alicujus latitudinis. Itaq; punctum C considerabitur ut pars utriusq; communis; & sic erit idem punctum consideratum ut majus & minus, id est ut quadratum, & circulus ipsi inscriptus. Quare duæ rectæ constituentes

ſtituentes angulum rectum nullo modo conſiderari ut una recta poſſunt. Multo autem minus, ſi conſtituunt angulum acutum. Quid ergo (inquiet forte aliquis) nullâne neq; arte, neq; fortuna dividi poteſt Linea recta in partes aliquotas? Punctum enim ſi nihil ſit, nuſquam eſt, neq; in mediâ Lineâ, neq; in tertia, neq; in quarta parte ejus. Sin punctum ſit quantum, auferetur per diviſionem aliqua pars rectæ dividendæ. Ad quod reſpondeo. Rectè dividetur recta, ſi ſecemus eam per Lineam habentem exiguam aliquam latitudinem, ita ut partes utrinq; ſint æquales, dicamuſq; totius rectæ ſecandæ medietatem eſſe ad mediam latitudinis Lineæ ſecantis. Accuratiùs autem dividi bifariam (ab humana ſaltem potentia) non poteſt. Itaq; hæc verba *duarum Linearum, &c.* ut obſcura reprehendo, propterea quod, quæ duæ lineæ, unam conſtituant vel non conſtituant, nondum docuerat.

Id quod facit duas Lineas compoſitas rectè vocari *unam*, eſt quod idem omnino habeant punctum commune, quale quidem habent arcus F C, C I; ſed non item F C, C D, neq; E C, C A.

Videamus ſecundò quænam ſint Lineæ quæ ad faciendum angulum debent ſe *mutuò tantum tangere*, Et (quoniam locum hunc exponens *Clavius* angulum effici dicit ex hujuſmodi *concurſu* ſeu *inclinatione*) quid ſit duarum Linearum in plano concurſus. *Etiam quid ſit jacere in directum*. Quid etiam ſit *inclinatio*, quam *Clavius* eandem rem eſſe putavit cum concurſu. Et quid ſit *Lineam a Linea ſecari*.

Recta arcum (ſive aliam Lineam curvam) *tangit tantum*, quando tangit quidem, tota tamen eſt extra circulum, ut nullum ſit utriuſq; commune punctum. Ut qui alicujus domus januam *tangit tantum*, is neq; intra domum eſt, neque in ipſa janua, ſed totus extra.

Concurrunt autem duæ Lineæ quando utriuſq; eſt aliquod commune punctum, necdum producitur ulterius.

Recta deniq; arcum ſecat quando pars rectæ eſt intra, pars extra circulum. Non eſt ergo eadem res contactus & concurſus; neq; quæ ſe pluſquam tangunt neceſſariò ſe mutuo

 ſecant,

ſecant, neq; rectè interpretatus eſt hoc loco *Euclidem Clavius*.

Tertiò, videamus quid ſit *jacere in directum*. Verba illa *jacere in directum* quem locum in Lineis non rectis habere poſſunt non intelligo; nam ſi *vera* ſunt, juxta interpretationem *Clavii*, qui dicit duos arcus F C, C I *jacere in directum* etiam duæ ſemiſſes ejuſdem circuli jacebunt in directum, & (quod inde ſequitur) puncta omnia totius perimetri, *jacebunt* in directum & punctum poteſt moveri a loco ſuo donec ad eundem locum redeat motu directo, & fiat perimeter recta Linea.

Videamus quartò, quid ſit *Inclinatio*. Quando recta rectæ ad angulos rectos inſiſtit, non dicitur (juxta ſermonem communem) omnino inclinari in utramvis partem rectæ cui inſiſtit: Quando autem altera alteri inſiſtit ad angulos obliquos tunc *inclinari* ad eam partem dicitur ubi angulus eſt acutus. Atq; hoc ſenſu *Inclinationem* intelligit in Elèmento undecimo *Euclides*. Itaq; minima *Inclinatio* rectæ C B ad C D tunc eſt, quando altera ad alteram eſt perpendicularis; maxima autem quando admovetur C B ad C D motu circulari ita ut ambæ coincidant. Idem etiam dici poteſt de *Inclinatione* rectæ C D ad C A, & rectæ C A ad C E, & rectæ C E ad C B. Motus enim circularis cujuſlibet e quatuor rectis ad rectos angulos deinceps collocatis *Inclinationem* menſurat, adeoq; angulos eo motu generatos, & ſemper quo major eſt pars totius circuitionis quæ eo motu circulari conficitur, eō major eſt angulus.

Jam *Inclinatio* rectæ C D ad arcum C I quo pacto menſurari poteſt, cum partes omnes arcus C I diverſas habeant inclinationes, niſi quod in puncto unico C *Inclinatio* maxima eſt, nempe puncti C quatenus in recta D C ad idem punctum C, quatenus in arcu I C. Itaq; angulus qui fit a curva C I & recta C D, omnino ad punctum ipſum C nullus eſt, niſi angulus contactus non ſit ejuſdem generis quantitatis cum angulo quem efficit Radius per motum circularem ad alium locum tranſlatus. De quo fuſiùs dicetur in examinatione Propoſitionis 16æ Elementi tertii.

Videamus

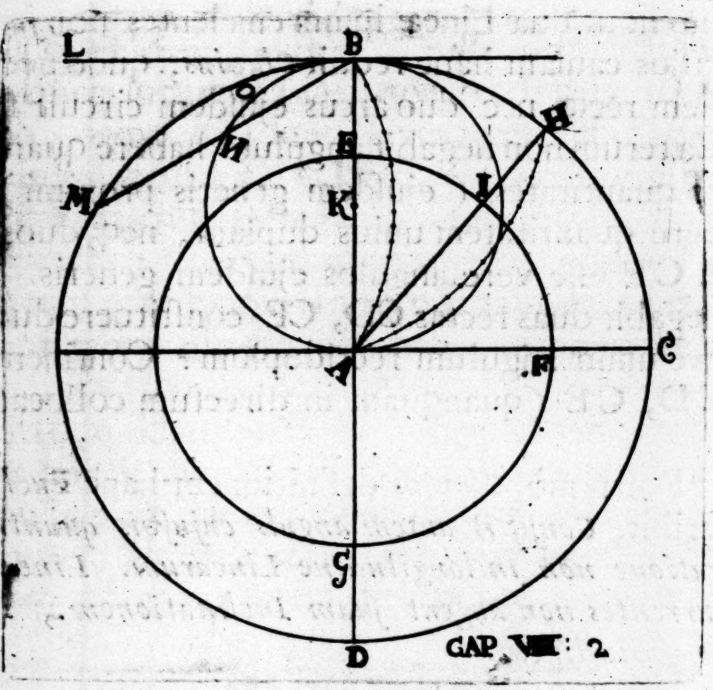
Videamus deniq; cur ad conſtitutionem Anguli, neceſſarium ſit ut duæ Lineæ ipſum efficientes non *jaceant in directum*, cujus cauſam hanc reddit *Clavius*, quod nec duæ partes ejuſdem rectæ, nec duo arcus ejuſdem circuli faciunt angulum. Cæterum non negabit angulum habere quantitatem, neq; duas quantitates I (ejuſdem generis proximi) compoſitas habere quantitatem unius duplam, neq; duos angulos A C D, A C E eſſe vere angulos ejuſdem generis. Quomodo ergo negabit duas rectas CD, CE conſtituere duos angulos rectos, ſive unum angulum rectiduplum? Continent ergo duæ rectæ C D, C E (quanquam in directum collocatæ ſint) angulum.

Poſtremò, *Clavius* definitionem hanc *Euclidis* exponens ſic ſcribit, *Conſiſtit autem anguli cujuſvis quantitas in ſola Inclinatione non in longitudine Linearum. Lineæ enim longius excurrentes non augent ſuam Inclinationem; igitur neq; anguli magnitudinem.*

Quid ergo opus eſt omnino ad eſſentiam anguli lineis; quæ minui poſſunt ambæ in infinitum, ſalva quantitate & natura anguli? Etiam in angulo contactus, ſi minuatur arcus I C quantum fieri poteſt, quænam erit differentia inter angulos D C C & D C D? Scire hinc potes an accuratiores, acutioreſvè ſint Mathematici quam aliarum artium ſtudioſi. Reſtat ut anguli plani naturam explicem, & inter angulum contactus, & angulum ex circulatione diſtinguam; & utramq; definiam ſi potero clariùs, accuratiùs, & ad uſum Geometricum accommodatiùs.

Centro A, motu Radii A B deſcribantur duo circuli BCD, E F G (neq; refert utrum A B ſit recta an curva, quales ſunt curvæ punctis ſignatæ A B, A H; nam eaſdem deſcribunt tum Superficies tum Lineas.) Et a centro ad circumferentiam ducatur recta A H utcunq;, ſecans circulum E F G in I. Facit ergo A B, per motum circularem ad A H, angulum B A H, & pergens ad C facit angulum majorem ejuſdem generis. Appellabimus autem hoc genus anguli *angulum genitum*

nitum ex circulatione sive motu circulari Radii. Itaq; Ideam anguli hujus generis perfectam habes. Cœterum ad definitionem ejus legitimam, investiganda prius ea sunt, quæ ipsi sunt essentialia.



CAP. VIII: 2

Primum est, ut sit quantum. Hoc autem manifestum est ex eo quod alter altero major esse potest; ut angulus B A C major est angulo B A H.

Secundò, quia anguli B A H, E A I æquales sunt, sed neq; rectæ A B, A E, neq; plana B A H, E A I, æqualia sunt, certum est, Quod essentia anguli non consistit neq; in quantitate Linearum quibus, includitur neq; in quantitate Superficierum BAH, EAI; neq; deniq; consistit essentia anguli in magnitudine arcuum B H, E I, cum anguli ipsi æquales sint, arcus æquales non sint.

Ubi ergo inveniemus æqualitatem illam propter quam æquales dicuntur duo anguli B A H, E A I?

Duo anguli B A H, E A I æquales vocantur, propterea quod æquales sunt partes, sive potiùs, eadem pars totius circumlationis Radii. Sunt enim duo arcus B H, & E I facti à motu Radii (sive recti sive curvi) A B eodem tempore. Itaq; æqualitas angulorum hujus generis consistit in æqualitate partium temporis in quo circulatio tota Radii perficitur. Atq; hinc est, nec aliunde, quod tum Anguli, tum Sectores in eodem circulo sumpti, sunt in eadem ratione cum suis arcubus.

Habes ergo naturam *Anguli ex circulatione geniti*, nempe eandem

eandem cum natura circulationis. Et angulus ipse est pars circulationis totius. Et arcus & anguli sui eadem est quantitas. Nomen autem anguli, arcui datum est propter lineas quæ ductæ a centro ad circumferentiam faciunt ut Angulus conspiciatur. Neq; sunt illæ Lineæ rectæ de Essentia anguli, qui sine illis determinatur in arcu, quanquam Essentiales sint figuris angulatis, ut triangulis, quadratis, *&c.*

Ex his quæ dicta sunt de natura Anguli brevis & clara emergit Anguli hujus generis definitio hæc, *Angulus est circuitionis* (sive circumlationis) Radii dum circulum vel partem circuli describit, quantitas. *Dicere enim quod sit inclinatio Linearum*, aniculæ potius est sedentis ad angulum *Camini*, quam Mathematici, ejusdemq; accurati & rigidi.

Mensuram autem hujus generis angulorum agnoscunt omnes esse arcum circuli; agnoscunt item Mensuram & Mensuratum esse in eodem genere quantitatis. Idem ergo est quantitatis genus, Arcus & Angulus.

Consideremus jam naturam *anguli contactus*. Divisa A B. bifariam in K, Radio K B describatur Semicirculus B A; ducaturq; recta B L magnitudinis indefinitæ, sed parallela A F, quæ propterea tanget circulos B A & B D in puncto B. Supponamus *rectam aliquam*, ut B L æqualem arcui B A, impossibile enim non est. Supponamus etiam B L in omni ejus puncto æqualiter flecti, sive incurvari, ita ut coincidat cum arcu B A; neq; enim hoc est impossibile, quia ut arcus extensione fieri potest Linea recta, ita recta per flexionem converti potest in arcum circuli. Habemus ergo duos arcus B A, B D æqualiter curvos, quanquam magnitudine inæquales. Deinde si a puncto B ducatur recta B M secans utrumq; semicirculum, majorem in M, minorem in N, erunt quoq; arcus B M, B N æqualiter curvæ (cum sint in eadem ratione cum suis circulis integris.) Quanquam arcus B M major sit quam B N.

Præterea, in eodem circulo, quo minor est arcus, eo minorem habet curvitatem; in ratione ipsorum arcuum qui in omni puncto æqualiter flectuntur, sive incurvantur.

Postremò, natura Anguli quem faciunt duo arcus B A, B C non

non consistit in quantitate Superficiei quam continent; nam Anguli quantitas determinata, Superficies illa indeterminata est; similiter neq; consistit natura Anguli quem faciunt recta B L cum arcu B M in Superficie indefinita, cui illæ duæ lineæ utrinq; adstant.

In quo ergo (inquies) consistit natura Anguli contactus duorum arcuum, vel arcus & rectæ? In eo quod Angulus ille determinat quantitatem curvitatis; ut ex modo dictis apertè constat. Nam cum duo arcus B D, B A sint æquè curvi, erunt etiam arcus B M, B N (qui sunt ut arcus B D ad arcum B A) æquè curvi. Et quia arcus B M duplo curvior est sua semisse, puta arcui B O, erit quoq; arcus B N duplo curvior quam est idem arcus B O sibi æqualis. Atq; idem omnino continget in omni alia proportione arcus exterioris ad interiorem.

Itaq; arcus illi qui Angulum contactus dicuntur efficere, aliud non sunt (quoniam curvitas major, vel minor, vel æqualis, alteri curvitati esse potest) quam quantitas curvedinis circumferentiæ. Itaq; Angulum contactus, (quem, angulum dici volunt Geometræ) sic definio. *Angulus contactus est quantitas curvitatis quæ est in arcu circuli facta a continua & uniformi flexione lineæ rectæ.*

Sequitur hinc, in puncto primo rectæ B L, nempe puncto B, ubi nulla intelligi potest flexio, nullam esse curvitatem, & proinde rectam B D cum arcu B M in puncto B constituere angulum rectum. Fatetur enim *Clavius* longitudines linearum nil mutare in magnitudine Anguli; nec ideo angulum contactus quicquam detrahere a magnitudine Anguli recti rectilinei D B L.

Sequitur etiam Angulum contactus non esse ejusdem generis cum angulo rectilineo (quod & *Clavius* fatetur) cum curvitates arcuum æquales esse possunt tunc quando arcus ipsi sunt inæquales. Hæc tibi satis perspicuè puto explicavi. Sin argumenta *Clavii* contra *Pelletarium* assensum tuum etiam nunc impediant, tollam ea cum istuc venero.

Cap.

Cap. IX.

De Figura.

Definitio 13. nempe, *Terminus est quod alicujus extremum est*, sera venit; cum in 3ª & 6ª definiisset terminos Lineæ, & Superficiei esse Puncta.

Definitio 14. *Figura est quæ aliquo vel aliquibus Terminis comprehenditur.* Quæro hic primo, ad quam Vocem expressam vel subauditam refertur Vox Relativa *quæ*. Si refertur ad figuram, definitio erit (*Figura est figura quæ aliquo*, &c.) vitiosa. Sin ad Vocem *magnitudo*, tum definitio talis erit, *Figura est magnitudo quæ aliquo vel aliquibus terminis comprehenditur*; vel brevius, *Figura est magnitudo undiquaq; finita.* Quæ quidem definitio est legitima. Sed quomodo excludet ab hac definitione *Clavius* Finitam Lineam? Dicet fortasse, Lineam quæ *longitudo tantùm est* Terminos alios non habere præterquam longitudinis, & propterea Figuram non esse. Quomodo ergo differunt inter se duæ Lineæ Finitæ inæquales quarum altera recta altera curva est, si non Figura? differunt enim plusquam longitudine.

Definitio 15. *Circulus est Figura plana sub una Linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, in quam ab uno puncto eorum quæ intra Figuram sunt posita cadentes omnes rectæ Lineæ inter se sunt æquales.* Quam non reprehendo, sed quæro, primo, quare latera omnia simul quæ constituunt ambitum Polygoni, non æquè una Linea sunt ac perimeter Circuli, qui Circulus Polygonum censeri potest laterum numero infinitorum? Si dicant differentiam consistere in eo quod duo latera Polygoni non habent punctum commune ad eos quos faciunt angulos, sicut habent duo quilibet arcus circuli, acquiescam. Cæterum si ita dicant, videant an ἀκρίβειαν illam propositionis 47. Elementi primi non tollant, cui maxima pars Geometriæ innititur. Quæro secundo, cur non definivit Circulum a circumductione Radii, ut definivit Sphæram a circumductione Semicirculi; nam potuit; & fuisset definitio illa declaratio

generationis circuli, & per illam hæc definitio demonstrari breviter potuisset. In his igitur definitionibus reprehendo τὴν σκαιότητα.

Definitio 34. *Parallelæ rectæ Lineæ sunt quæ cum in eodem sint plano, & ex utraq; parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuò incident*, vera quidem est Propositio, non autem bona Definitio. Bona Definitio ingenerare debet auditoris animo Ideam Parallelismi, id est, Æquidistantiæ. At in hac definitione, ne una quidem vox est quæ significat aut æqualitatem aut duarum rectarum distantiam. Neq; omnino possibile est Ideam habere Lineæ infinitè productæ. Fortasse ex eo quod in neutram partem coincidant, demonstrari potest, quod sunt parallelæ, sive quod ubiq; æque distant, sed ex alia Parallelarum, sive Æquidistantium definitione.

Deinde per bonas definitiones demonstrari solent & debent conclusiones primæ; hac vero *Euclides* nusquam utitur.

Definitio deniq; neq; demonstrabilis est, nec esse debet; cum sit Demonstrationis Principium; hanc autem demonstrabo a Definitione alia hac, *Parallelæ rectæ sunt in quarum una sumptis duobus punctis ad quodcunq; intervallum, ab illis punctis duæ rectæ facientes cum ipsa ad easdem partes angulos æquales, ductæ ad alteram sunt æquales.* Ex qua definitione necessario sequitur duas illas rectas productas nunquam esse concursuras, ut quæ ubiq; ab æqualibus rectis æqualiter inclinatis distinentur.

Definitio mea hæc Ideam Æquidistantiæ animo ingenerat, nec ab alia priore demonstrari potest; possunt autem ab illa multo brevius demonstrari parallelarum rectarum, vel etiam parallelorum planorum proprietates, quam aut ab *Euclide* aut a *Clavio* demonstrantur.

Atq; hæc dicta sufficiant de Definitionibus ad Elementum primum, ex quibus cognoscere potes quàm bene tum *Clavius*, tum *Euclides*, tum etiam eorum sectatores naturam Parallelarum, aut Anguli, aut Lineæ, aut Puncti intellexerunt. Videamus jam *Petitiones* utrum æquæ an iniquæ sint.

Cap. X.

De Pet. 1ª. *El.* 1. *&* *de Def.* 10.

PEtitio 1ª. *Ut a quovis puncto ad quodvis punctum, rectam Lineam ducere concedatur.*

Si concedatur Lineam habere Latitudinem aliquam visibilem, Æqua est. Nam a puncto ad punctum extendi potest ex lino filum; alioqui factu impossibile est, & propterea Petitio Iniqua est.

Sed illa *Euclidis* γραμμὴ (etsi Latitudinem habeat) duci non potest, nisi in Plano. Planum autem describi non potest sine ope rectæ Lineæ, ita ut neq; recta *Euclidis* neq; superficies plana accuratè describi possit. Opus est instrumentis mechanicis, qualia sunt Regula & Norma, id est non accuratè. Æquum tamen esse fateor ut in opificiis humanis pro accurato habeatur, quod accurato est proximum. Sed quod Lineas Hyperbolicas & Ellipticas duci posse *Euclidistæ* non concedant (cum certius aliquanto Ellipsis & Hyperbole ope fili duci potest, quam Linea recta ope Regulæ) Iniquum est. Itaq; quamdiu Geometræ Lineas has duci posse negant, tamdiu Petitio hæc Iniqua est, & proptera etiam Secunda haberi debet pro iniqua.

Definitiones Elementi secundi faciles sunt, & propter eam causam vitio carent. Idem dico de definitionibus Elementi 3ⁱ. fere omnibus. Fere, inquam,

Notandum enim est quod in secunda definitione Elementi 3ⁱ. definit *Tangere*, per *Tangere nec Secare*, incertum relinquens an Punctum Contactus intelligendum sit in una tantum Linearum contiguarum, an in utraq; an inter utramq;. Potest enim si (quod ille dicit) Punctum nihil est, considerari Punctum inter utramque; nam contigua possunt non modo loco disjungi, sed etiam qualitate aliqua differre, ut colore. Et propterea duo sunt; & sic habebimus tria puncta, nimirum duo in ipsis Lineis contiguis quorum alterum sit album, alterum nigrum, & inter illa duo puncta, tertium nullius coloris. Quemadmodum etiam duæ planæ Superficies admotæ ad contactum mutuum

erunt altera alba, altera nigra, altera nihil, & tamen omnes simul una Superficies.

Non dubito quin *Euclides* Tangentes circulorum semper ducendas putavit per diametrorum terminos; atq; ita Punctum Contactus semper commune fecit trium Linearum, nimirum, arcus circuli, Tangentis circulum, & Lineæ cujusdam per quam Tangens ab arcu dividi & loco separari posset. Neq; credibile est, si Contactum quid sit clarè explicuisset *Euclides*, controversiam inter *Clavium* & *Pelletarium* de angulo Contactus ullam extitisse.

Definitio 10. *Similia circuli Segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales*, aut *in quibus Anguli sunt inter se æquales*. Si in duobus Segmentis circulorum valdè inæqualium inscriberentur duo Anguli inter se æquales, credamne omnem hominem qui agnosceret Angulorum illorum æqualitatem, necessariò etiam agniturum esse ipsorum segmentorum Similitudinem inferri posse raticcinando, id est inde vel aliunde demonstrari posse. Sed tunc non erit Definitio, nam ea debet esse indemonstrabilis.

Cum Geometria tota versetur circa Quantitates, commensurabilia & incommensurabilia, æqualitatem & inæqualitatem, Figurarum Proportiones & Similitudines; cumq; Principia demonstrandi sint definitiones; Quomodo excusari possunt Geometriæ Magistri qui tanto aliis accuratiores haberi volunt, quod nusquam neq; Quantitatem, neq; Mensuram, neq; Similitudinem definierunt. Neq; ipsam Geometriam, cui, ut videtur, studere homines æquum esse existimaverunt antequam scirent Cui bono? Geometriam rectè definies *esse Scientiam qua ex aliqua vel aliquibus magnitudinibus mensuratis, cognoscimus per ratiocinationem alias non mensuratas*. *Mensuram* autem esse *materiale aliquid quod habenti magnitudinem applicatum semel vel pluries, ipsam æquat*; videmus enim Lineas mensurari Pede, Brachio, &c, Plana Planis, Solida Solidis, Fluida Vasibus seu locis congruis. *Æqualia* autem *esse dices quæ eidem loco congruere possunt*. *Similia quæ sola differunt magnitudine*. *Quantitatem* deniq; *magnitudinem definitam*, nempe Expositione aut comparatione cum alia magnitudine cognita. Quæ definitiones

nitiones & faciles sunt & Principia demonstrandi.

Definitio etiam 10ª. *El.* 5ⁱ. *Similia circuli Segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales*, vel *in quibus anguli sunt inter se æquales*, Definitio non est, sed Suppositio. Quænam enim est tanta illa affinitas inter *æqualitatem duorum angulorum* & *Similitudinem duorum Segmentorum circuli*, ut qui intelligit angulos in Segmentis esse æquales, necessariò statim intelligat Segmentorum Similitudinem.

Clavius ad Prop. 22. hujus Elementi tertii demonstrat, quod *Si duo aut plures circuli se mutuò tangant interiùs in uno Puncto, a quo duæ aut plures rectæ educantur, erunt & arcus inter quascunq; duas Lineas intercepti, & arcus inter quamcunq; Lineam & Punctum Contactus intercepti, similes.* Exempli gratia in Figura ad Cap. VIII, arcus duos B M, B N demonstrat esse similes. Et quidem rectè. Sed ex eo sequetur arcum utrumq; habere latitudinem aliquam, majorem majorem, minorem minorem, alioqui falsum erit, Apelle judice, vel alio quovis Pictore; cum in similibus arcubus inæqualibus latitudines ipsorum arcuum æquales esse non possunt, sed in ipsorum arcuum ratione inæquales. Etiam ut longitudines inæquales quatenus longitudines, similes sint dictu absurdum est.

Hactenus Peccata Definitionum *Euclidis* leviora. Quæ tamen si demonstrationes nullas inficiunt, pro nullis habeantur. Accedo jam ad definitiones Elementi quinti, quæ pertinent ad doctrinam Rationum, & Proportionum, Geometriæ medullam.

Cap. XI.

De Ratione.

PRima est, *Pars est magnitudo magnitudinis minor majoris, cum minor metitur majorem.* Si per Partem intelligat partem aliquotam, & inter partes aliquotas numerat Totum (nam æquale metitur æquale) bona est; & eadem in lineis est res, *pars* & *mensura*.

Definitio

Definitio 3ª. *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo*. Quis ex Definitione hac, Latina ſive Græca, naturam Rationis comprehendere intellectu poteſt? Quid enim eſt *ejuſdem generis*? Ubi hoc in antecedentibus explicavit? Quid eſt illud *quædam*, ſive (ut Græcè ſonat) *aliqualis habitudo*? Quid deniq; habitudo? Neq; hoc uſquam definivit, neq; Quantitatem.

Ideam Rationis (de qua hoc loco *Euclides*) omnes perfectam habent. Mercator ſcit ex Quantitate collatæ a ſe pecuniæ, quantum habere debet lucri. Colonus non ignorat quantum uſum agri communis habere debet, ex quantitate agri ſibi proprii. Mercator qui tertiam partem collatæ pecuniæ contulit, ſtatim dicet debere ſibi tertiam partem lucri. Colonus qui poſſidet tertiam partem agri privatim, promptè poſtulabit tertiam partem uſûs agri communis. Unuſquiſq; enim videt ineſſe in ea re comparationem Quantitatis ad Quantitatem, quantitatis expenſi ad quantitatem accepti. Sed Ideam hanc ita oratione generali adæquate complecti, ut inde Regulas generales demonſtrare poſſit, non facile poteſt unuſquiſq;. Juxta hanc Ideam vulgarem, proportionem in Numeris optimè definivit *Euclides* Def. 24ª. El. 7ⁱ. etſi eo loco non Rationem ſed Proportionem dicat. Proportionem autem in alio ſenſu dicit in Def. 4ª. El. 5ⁱ. pro Rationum ſimilitudine. Quod parvi momenti peccatum eſt, niſi quod inconſtantia in vocabulis ſignum ſit obſcuritatis in intellectu. Sed Ideam illam quam habuit *Euclides a partibus iiſdem numerorum*, magnitudinibus quæ non ſemper ſunt ut numerus ad numerum, adaptare non potuit. Itaq; omiſſâ illa reſponſione partium ad partes, coactus eſt Ideam aliam quærere tum magnitudinum, tum numerorum communem. Noverat in quatuor proportionalibus primum ad ſecundum *ita ſe habere* (Græcè οὕτως ἔχειν) ut tertium ad quartum. Itaq; a cogitatione vocis *ita habeat*, quaſi ab Idea ipſa rei (converſo Verbo ἔχειν in Nomen σχέσις, ſeu, Verbo *habere* in Nomen *habitudo*) formavit Rationis Definitionem illam ſterilem, *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis ſecundum quantitatem habitudo quædam*; ſonum verborum ſecutus pro Idea rei.

Antequam

Antequam Rationem definiam, necessarium est definire Quantitatem, & quantitatum diversa genera inter se distinguere. Interroganti enim Quantum est, qui ita respondet ut interrogantis animus acquiescat in eo quod respondetur, necesse est ut magnitudinem de qua quæritur, vel exponat ad oculos, vel determinet per comparationem cum alio quanto per mensuram determinato. Animus enim in Indefinitis non acquiescet.

Sed quia non omnia quanta mensurantur per lineam, nec per Superficiem, nec per Solidum, totidem erunt genera mensuræ, quot sunt genera quantorum. Corpus mensuratur tot mensuris quot habet dimensiones, & proinde tria habet diversa genera quantitatum, nempe Lineam, Superficiem, & Soliditatem; quarum quantitatum unius pars, pars alterius esse non potest. Et in universum Quantitates illæ diversi generis sunt, quarum, pars unius non est pars alterius; vel ut definitur ab *Euclide* quarum una quantumvis multiplicata nunquam alteram superabit.

Lineæ ergo omnes sive rectæ sive curvæ ejusdem sunt generis quantitates; & quia curva extendi potest, ita ut fiat (non mutata quantitate) recta, altera earum multiplicata, alteram superare potest.

Ab his tribus generibus *Clavius* excludit Numerum tanquam genus ab omnibus tribus diversum Non rectè. Numerus semper est in eodem genere quantitatis cum Numerato. Neq; genere differunt Unum & Plura. Numerus autem & Plura idem sunt. Numerus Linearum, & Lineæ habent idem genus quantitatis. Item Numerus Angulorum & Angulus; Temporum & Tempus, *&c.* Quod *Clavius* Lineam finitam & Lineam infinitam ejusdem esse generis negat superfluum est, tanquam si quis diceret Ens & non-Ens esse diversi generis, Linea enim infinita nulla est. Quod autem dicitur in Mathematicis *Infinitum*, id significat solummodo indeterminatum, sive indefinitum, id est, quod quantum sit non est dictum.

Distinguendum etiam est inter Quantum & Quantitatem quorum unum nunquam dicitur de altero.

Præterea etsi Magnitudo, ut Longitudo, Superficies, Soliditas,

tas, ſolis corporibus tribui propriè poſſunt, Quantitas tamen multis aliis rebus tribui rectè poteſt. Quicquid enim eſt de quo verè dicimus, quod majus vel minus alio eſt, vel æquale, vel de quo verè dicitur magis vel minus vel æqualiter eſt, habet illud quantitatem & dimenſionem vel unam vel plures, & proinde,

Tempori ſua quantitas eſt quæ exponi poteſt per Lineam.

Motui eſt ſua ſibi quantitas exponenda per Lineam.

Etiam Vis habet ſuam ſibi quantitatem exponendam per Lineam vel Planum. Et Pondus quantitatem ſuam quæ exponi poteſt etiam per Lineam vel Solidum. Nec tamen inde inferri poteſt, aut tempus, aut motum, aut vim, aut pondus, eſſe Lineam aut aliam magnitudinem.

Deniq; Ratio (quoniam Ratio alia aliâ major eſt vel minor) quantitatem habet, & per duas Lineas exponitur. Quandocunq; enim exponuntur duæ Lineæ, non modo exponuntur ipſæ, ſed etiam ipſarum Ratio. Ratio enim eſt (ut eam definiam) *magnitudinis ad magnitudinem Relatio.* Neq; exponi poteſt niſi per duas Lineas, quarum altera Antecedens altera conſequens (ut in omnibus ferè aliis Relationibus) appellatur.

Cap. XII.

De iiſdem Rationibus.

Def. 6. *IN eadem ratione magnitudines dicuntur eſſe, prima ad ſecundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquè multiplicia, a ſecundæ & quartæ æquè multiplicibus, qualiſcunq; ſit hæc multiplicatio, utrumq; ab utroq; vel una deficiunt, vel una æqualia ſunt, vel una excedunt; ſi ea ſumantur quæ inter ſe reſpondent.*

In hac Definitione nulla mentio eſt *habitudinis unius magnitudinis ad aliam*, cum tamen ex Definitione *Euclidis* verba illa ſunt de *Rationis eſſentia.* Itaq; aut definitio Rationis aut definitio *ejuſdem Rationis* vitioſa eſt. Neq; Axioma eſt, quia non eſt lumine naturali cognoſcendum. Neq; eſt ex antecedentibus

dentibus demonſtrabile. Neq; deniq; de quantitate continua demonſtrabile eſt ex ſubſequentibus. Et tamen vera eſt propoſitio, & converſa Prop. 12. hujus Elementi quinti. Demonſtrari autem poteſt per definitionem quam ego poſui hanc, Ratio *eſt duarum magnitudinum ſecundum quantitatem Relatio*, & demonſtratam vidi.

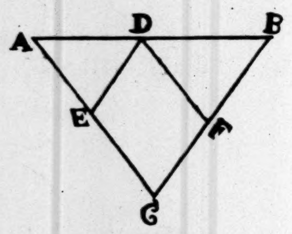
Clavius, ſentiens (ut puto) definitionem hanc egere defenſione, longam, de cauſa propter quam *Euclides*, *quatuor magnitudines proportionales & non proportionales*; *per earum æquè, multiplicia definierit*, orationem inſtituens, nullam adfert cauſam aliam, præterquam quod propter multarum magnitudinum incommenſurabilitatem coactus ſit inveſtigare aliquid, quod certum ſit convenire quibuſcunq; numeris eandem habentibus proportionem, deinde idem demonſtrare convenire etiam in commenſurabilibus. Hoc tamen nuſquam præſtitum eſt. Itaque idem eſt ac ſi dixiſſet, ideo illum proportionalia ſic definiiſſe, quia definitionem meliorem nondum poterat reperire.

Exponantur quatuor numeri proportionales 8. 4 :: 6. 3. Vides hic duas Relationes totius ad dimidium; ſunt enim totum & dimidium Relativa, & Relatio totius 8 ad dimidium ſuum 4. eadem Relatio quæ totius 6. ad ſuum dimidium 3. Idem dici etiam poteſt de tertiis, quartis, &c. æquè ac de dimidiis. Patet ergo Rationem eſſe Relationem; & Rationem eandem eſſe Relationem eandem. Et propterea proportionem in numeris *per Partes eaſdem* rectè definivit *Euclides*. Sed invenire debuit aliquid quod Rationibus etiam magnitudinum incommenſurabilium conveniret. Cur autem non fecit? An impoſſible erat? Neſcio, niſi quod ſit difficile. Duæ Lineæ ſimul atq; ductæ ſunt, habent inter ſe Rationem ſuam, quæcunq; ea ſit. Et quæ Cauſa efficiens erat ipſarum Linearum, eadem erat & cauſa ejus quam habent inter ſe Rationis. Cauſa ipſarum Linearum efficiens erat Ductio, id eſt motus, quare etiam Cauſa efficiens Rationis quam habet earum altera ad alteram erat motus ille idem, ex quo motu Lineæ ipſæ ortæ ſunt. Etiam Ratio illa eadem erat in Motibus ipſis quibus illæ Lineæ erant *deſcriptæ*. Quærenda ergo eſt Rationis duarum Linearum inæqualium *identitas*, ſive *æqualitas*, ſive *ſimilitudo*

(quæ tria nomina in Rationibus idem significant) in Motuum inæqualium aliqua similitudine, id est, in responsione partis ad partem vel portionis ad portionem (sive illæ partes aliquotæ sint, sive non sint) itaq; qui tales motus excogitaverit, proportionalia ipsa determinabit ductisq; Lineis rectis determinabit exponetq; oculis.

Factu autem difficile non est. Nosti enim *motu sive ductu Lineæ uniformi, partes Lineæ descriptas æqualibus temporibus semper esse inter se æquales.* Item si Linea descripta sit eadem semper velocitate partes ejus æqualibus temporibus descriptæ esse etiam inter se æquales.

Sit recta A B descripta motu uniformi, in Tempore quocunque; & in parte aliqua ejusdem temporis, eodem motu uniformi, descripta sit A D pars rectæ A B. Quoniam ergo motus uniformis erat in omnibus partibus æqualibus temporis, descriptæ erunt partes æquales tum totius rectæ A B, tum rectæ A D. sive illæ partes toti A B sint, vel non sint commensurabiles.



CAP XI

Eodem tempore, motu uniformi quidem, ut ante, sed tardiore, sit descripta recta A. C. faciens cum A B angulum quemcunq; B A C; & quo tempore descripta erat A D, eodem intelligatur descripta A E. Quare in rectis A C, A E, pro partibus sive portionibus sumptis in A B, portiones æquales semper describentur in A C, eodem modo quo tota A B respondet toti A C, & pars A. D parti A E.

Habebunt ergo partes æquales factæ æqualibus temporibus in A C ad partes æquales factas æqualibus temporibus in A B, eandem rationem singulæ ad singulas, quam habet tota A. C. ad totam A B, sive etiam quam habet A E ad A D. Etiam partes omnes æqualibus temporibus factæ in E C (differentia inter A C, A E) ad partes omnes æqualibus temporibus factas in B D (differentia inter A D & A D) singulæ ad singulas, eandem habebunt rationem quam A C tota ad A B totam, vel A E pars ad A D partem.

Quare

Quare si A B & A D sint incommensurabiles, & proinde etiam A C, A E incommensurabiles; intelliganturq; quotlibet partes æquales sumptæ in A B ita ut restet ad complendam A B, pars minor quam una earum partium; & totidem partes æquales intelligantur sumptæ in A D, ita etiam ut restet ad complendam rectam A D, minor quam una harum partium; fiatq; idem in rectis A C, A E, omnes illæ partes æquales simul sumptæ in A B habebunt eandem rationem ad totam A B quam habent partes similes æquales sumptæ in A C ad ipsam A C; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A D ad ipsam A D; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A E ad ipsam A E.

Eædem ergo sunt rationes quas determinat sive exponit motus uniformis (id est motus æqualibus temporibus æquales rectas describens) eodem tempore, nempe ratio A B ad A C, vel A D ad A E vel differentiæ D B ad differentiam E C, sive in commensurabilibus sive in incommensurabilibus.

Quare *rationes easdem Definio esse illas quas exponit in duabus rectis motus uniformis æqualibus* temporibus; vel universalius *in* eadem ratione sunt quæ determinantur a causa quacunque temporibus æqualibus æqualia efficiente.

In eadem Figura, si jungatur B C, & ducatur D F parallela E C secans B C in F, erit triangulum B D F simile toti triangulo B A C, propter angulos ad A & D æquales & angulum ad B communem. Similes autem Figuræ non sunt quæ differunt plus quam magnitudine; nam si non essent æquiangulæ, aut non haberent latera circa æquales angulos proportionalia, non esset inter eas ulla figuræ similitudo. Eadem ergo est ratio A B ad D B, quæ C A ad D F. Sed ut A D ad D B, ita ostensa est esse C A ad E C. Sunt ergo D F & E C æquales; & proinde (ducta D E) triangula A D E, A B C sunt similia.

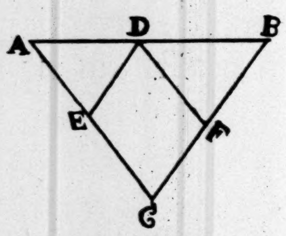
Ad definitionem hanc, Propositiones illæ quæ sequuntur in Elemento quinto, de Permutatione, Conversione, Compositione, &c. Rationum, accurrunt, & ad lucem ejus omnes ferè sese demonstrant. *Euclidis* autem demonstrationes duplo plures sunt, propterea quod idem in quantitate continua seorsim a numeris demonstrat; & multo longiores quam erat

 necesse,

(quæ tria nomina in Rationibus idem significant) in Motuum inæqualium aliqua similitudine, id est, in responsione partis ad partem vel portionis ad portionem (sive illæ partes aliquotæ sint, sive non sint) itaq; qui tales motus excogitaverit, proportionalia ipsa determinabit ductisq; Lineis rectis determinabit exponetq; oculis.

Factu autem difficile non est. Nosti enim *motu sive ductu Lineæ uniformi, partes Lineæ descriptas æqualibus temporibus semper esse inter se æquales.* Item si Linea descripta sit eadem semper velocitate partes ejus æqualibus temporibus descriptæ esse etiam inter se æquales.

Sit recta A B descripta motu uniformi, in Tempore quocunque; & in parte aliqua ejusdem temporis, eodem motu uniformi, descripta sit A D pars rectæ A B. Quoniam ergo motus uniformis erat in omnibus partibus æqualibus temporis, descriptæ erunt partes æquales tum totius rectæ A B, tum rectæ A D. sive illæ partes toti A B sint, vel non sint commensurabiles.



CAP XII

Eodem tempore, motu uniformi quidem, ut ante, sed tardiore, sit descripta recta A. C. faciens cum A B angulum quemcunq; B A C; & quo tempore descripta erat A D, eodem intelligatur descripta A E. Quare in rectis A C, A E, pro partibus sive portionibus sumptis in A B, portiones æquales semper describentur in A C, eodem modo quo tota A B respondet toti A C, & pars A. D parti A E.

Habebunt ergo partes æquales factæ æqualibus temporibus in A C ad partes æquales factas æqualibus temporibus in A B, eandem rationem singulæ ad singulas, quam habet tota A. C. ad totam A B, sive etiam quam habet A E ad A D. Etiam partes omnes æqualibus temporibus factæ in E C (differentia inter A C, A E) ad partes omnes æqualibus temporibus factas in B D (differentia inter A D & A D) singulæ ad singulas, eandem habebunt rationem quam A C tota ad A B totam, vel A E pars ad A D partem.

Quare

Quare si A B & A D sint incommensurabiles,& proinde etiam A C, A E incommensurabiles; intelliganturq; quotlibet partes æquales sumptæ in A B ita ut restet ad complendam A B, pars minor quam una earum partium; & totidem partes æquales intelligantur sumptæ in A D, ita etiam ut restet ad complendam rectam A D, minor quam una harum partium; fiatq; idem in rectis A G, A E, omnes illæ partes æquales simul sumptæ in A B habebunt eandem rationem ad totam A B quam habent partes similes æquales sumptæ in A C ad ipsam A C; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A D ad ipsam A D; & quam habent omnes similes partes æquales sumptæ in A E ad ipsam A E.

Eædem ergo sunt rationes quas determinat sive exponit motus uniformis (id est motus æqualibus temporibus æquales rectas describens) eodem tempore, nempe ratio A B ad A C, vel A D ad A E vel differentiæ D B ad differentiam E C, sive in commensurabilibus sive in incommensurabilibus.

Quare *rationes easdem Definio esse illas quas exponit in duabus rectis motus uniformis æqualibus* temporibus; vel universalius *in* eadem ratione sunt quæ determinantur a causa quacunque temporibus æqualibus æqualia efficiente.

In eadem Figura, si jungatur B C, & ducatur D F parallela E C secans B C in F, erit triangulum B D F simile toti triangulo B A C, propter angulos ad A & D æquales & angulum ad B communem. Similes autem Figuræ non sunt quæ differunt plus quam magnitudine; nam si non essent æquiangulæ,aut non haberent latera circa æquales angulos proportionalia, non esset inter eas ulla figuræ similitudo. Eadem ergo est ratio A B ad D B, quæ C A ad D F. Sed ut A D ad D B, ita ostensa est esse C A ad E C. Sunt ergo D F & E C æquales; & proinde (ducta D E) triangula A D E, A B C sunt similia.

Ad definitionem hanc, Propositiones illæ quæ sequuntur in Elemento quinto, de Permutatione, Conversione, Compositione, &c. Rationum, accurrunt, & ad lucem ejus omnes ferè sese demonstrant. *Euclidis* autem demonstrationes duplo plures sunt, propterea quod idem in quantitate continua seorsim a numeris demonstrat; & multo longiores quam erat

 necesse,

necesse, propter sterilitatem definitionis Rationis.

Sed quid (inquies) opus est Theorematum purè Geometricorum, demonstrationes a motu petere. Respondeo primo. Demonstrationes omnes nisi Scientificæ sint, vitiosæ sunt; & nisi a causis procedant, Scientificæ non sunt. Secundo, nisi conclusiones a constructione, id est a descriptione Figurarum, id est a Linearum ductione demonstrentur, vitiosæ sunt. Jam omnis Linearum ductio motus est; itaq; vitiosa est omnis demonstratio cujus Principia prima non continentur in definitionibus motuum quibus Figuræ describuntur. Sed post theoremata aliquot prima demonstrata, cætera ab his dependentia non egent demonstratione quæ fit a motu, ut quorum demonstrationes in demonstrationibus priorum continentur, nec alia re egent, ut intelligantur, præter illorum priorum explicationem, vel conversionem.

Cap. XIII.

De Rationum calculo.

DEfinitio 10. irreprehensibilis est, nempe hæc. *Cum autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam duplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur ejus, quam habet ad secundam; Et semper deinceps, uno amplius quamdiu proportio extiterit.*

Est autem quod reprehendi potest & debet in expositione hujus definitionis apud *Clavium.*

Sic enim scribit, *Interpretes nonnulli colligunt ex hac definitione, si proponantur plures quantitates continue proportionales, proportionem primæ quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis primæ quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem hujus. Eodem modo volunt, proportionem primæ quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam,* &c. *Quod tamen nulla*

la est ratione concedendum. Neq; enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo proportionem primæ quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam ejus proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, ut diximus. Non autem intelligit, illam duplam esse hujus, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. *proportionem* 25. *ad* 1. *duplam esse proportionis* 25. *ad* 5. *cum potius eam quis dixerit esse quintuplam?*

In illis qui putant, positis tribus continuè proportionalibus, rationem primi ad tertium duplam esse rationis primi ad secundum; item positis quatuor proportionalibus, rationem primi ad quartum triplam esse primi ad secundum, ubi primum est omnium maximum, etiam ego sum. Exempli gratia in his numeris 8. 4. 2. 1. dico rationem 8 ad 1 esse triplam rationis 8 ad 4; & sesquialteram rationis 8 ad 2; & rationem 8 ad 2 duplam esse rationis 8 ad 4. Non solum quia *Euclides* rationes illas triplicatas vel duplicatas appellat, sed quia verum est, & lumine naturali æquè manifestum, ac unum & unum esse duo, aut unum & duo esse tria.

Vox qua utitur hoc loco *Euclides*, nempe διπλασίων, & vertitur à *Clavio duplicata*, aliis in locis utitur pro dupla. Primo in Prop. 20. El. 3°. Itaq; angulus in Centro, non minus dicitur duplicatus anguli in circumferentia, quam duplus. Etiam a *Clavio* vertitur vox illa Græca διπλασίων non modo per *duplex*, sed etiam per *duplus*; in propositione ipsa & in conclusione per *duplex*, scilicet ne dissentire videretur propositio a conclusione; sed in demonstratione, per *duplus*. Si ergo *duplicatum*, *duplex*, & *duplum*, in quantitatibus non idem significant, non debuit illis uti ut idem significantibus.

Rursus in Propositione ultima El. 9. eadem voce Græca utitur *Euclides* pro ratione 2 ad 1 vel 4 ad 2, ubi rursus *Clavius* illam

illam reddit per *duplam*. Nonne ergo & ipſe *Clavius* ex eo quod dixit *Euclides* duplicatam, intellexit (ſicut alii) duplam. Qui verbi ejuſdem ſignificationem modo unam modo aliam facit, mihi quidem videtur ſubjectam rem nullo modo intelligere. Quo autem nomine appellabunt rationem 8 ad 4 comparatam cum ratione 8 ad 2? Dicent illam eſſe hujus *ſubduplicatam*, & rationis 8 ad 1 *ſubtriplicatam*. Numerum autem numeri ſubduplum dicent, non ſubduplicatum; & numerum 2 numeri 6 non ſubtriplicatum ſed ſubtriplum, Nomina Latinæ genti inaudita. Itaq; ceſſantis jam Linguæ verba quæ velut Teſtamenta morte confirmata ſunt,& quæ mutari non debent, ſuo arbitrio ſine neceſſitate mutat. Quid enim omnino ſignificat ſubduplum aut ſubduplicatum, ſi ſignificat aliquid præter dimidium aut ſubtriplum vel ſubtriplicatum præter tertiam partem. Retinebo ergo vocabula propria, *duplicatum* vocans etiam *duplum*, & triplicatum triplum; nec pro *ſubduplicato* & *ſubtriplicato* dubitabo dicere *dimidium*, & *tertiam partem*, vel (ſi libet) *trientem*. Etiam in Rationibus, (quanquam id non concedat *Clavius*) ſimiliter dicam, niſi id falsò dici oſtendat. Quod enim rogat, *Quis affirmabit in his numeris* continuè proportionalibus 25. 5. 1, proportionem 25 ad 1 duplum eſſe proportionis 25 ad 5? Potius eam quis dixerit eſſe quintuplam, nihil probat. Quid, quia terminus primus eſt quintuplus, ſecundi, & ſecundus tertii, ob eam cauſam dixerit aliquis rationem 25 ad 1, quintuplam eſſe rationis 5 ad 1 potius quam duplam? Manifeſtum eſt rationem 25 ad 5 eſſe rationem unicam, & rationem 5 ad 1 eſſe etiam unicam & ipſi æqualem; & rationem 25 ad 1 componi ex illis rationibus duabus æqualibus. Quid aliud ergo negat *Clavius* niſi rationem ex duabus rationibus æqualibus compoſitam conſtituere unius earum duplam? Cur autem hoc negat? Quia numerus 25 numeri 5 eſt quintuplus, ſcilicet oblitus quæſtionis, quæ non inſtituitur de numero vel magnitudine aliqua abſoluta, quæ ſit alterius quintupla, ſed de ratione quæ eſt magnitudo comparativa; itaq; rationem unicam 25 ad 5 computavit pro quinq; rationibus. Natus eſt error *Clavii* ex eo quod vulgo

apud

apud Mathematicos vocabatur ratio quintupli ad ſimplum quintupla ratio, & ratio dupli ad ſimplum (ut El. 9°. Prop. ult.) ratio dupla imperitè & falſò ; nam ratio 2 ad 1 non eſt ratio dupla, ſed ſimpla, nempe dupli ad ſimplum. Neq; quicquam valet quod illuſtrationis cauſa ſubjungit, quemadmodum etiam proportio octupla dupla eſt proportionis quadruplæ ; cum tamen quadruplæ duplicata ſit ſedecupla, ut hic patet 16. 4. 1. Difficile conceptu eſt quomodo octupla proportio magis ſit quadruplæ duplæ, quam octuplicata ſit quadruplicatæ duplicatæ. Eſto autem octupla proportio quadruplæ dupla. Quid ſequitur? Nonne quemadmodum in his numeris 16 unitates duplæ ſunt octo unitatum ; ita ſedecem rationes duplas eſſe octo rationum, & proinde etiam duas rationes 16 ad 4, & 4 ad 1 duplam eſſe rationis 16 ad 4, vel 4 ad 1 ; id quod *Clavius* demonſtratum nollet?

Poſtremò, objiciens quærit, in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, ut 4. 4. 4. atq; adeo continuè proportionalibus, qui fieri poteſt ut proportio primi ad tertium dupla ſit proportionis primi ad ſecundum, cum ſit omnino eadem? Profecto ſi ratio 4 ad 4 nempe ratio æqualis ad æquale, id eſt ipſa æqualitas quantitas ſit, valida eſt objectio. Sin quantitas non ſit, frivola eſt ; cùm nihil ad nihil additum, vel per nihil multiplicatum ſemper facit nihil. Antequam autem ad hanc & alias ejus objectiones reſpondeam, non abs re erit *quantorum* genera amplius (ex ipſis *Euclide* & *Clavio*) diſtinguere, & quid ſit rationum *additio* & *ſubtractio*, ex iiſdem, explicare ; & cur in tribus continuè proportionalibus, quorum primum eſt maximum, rationem primi ad tertium duplam eſſe dixi rationis primi ad ſecundum ; non tamen quando primum eſt minimum.

Cap. XIV.

Adhuc de Rationum calculo.

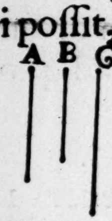
DEf. 5^a. El. 6^i. hæc eſt, *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem*, & vera eſt. Nam ſi ſint proportiones illæ duæ eædem vel non eædem, ſive prima maxima ſit, vel non maxima, ſemper illis conveniet Definitio. Exempli gratia in his numeris 4, 2. 6, 3. ubi rationes ſunt eædem, ſi multiplices inter ſe antecedentes 4 & 6, qui faciunt 24, & conſequentes 2 & 3 qui faciunt 6, ratio naſcens erit ratio 24 ad 6, id eſt 4 ad 1, id eſt duplicata rationis 4 ad 2, vel 6 ad 3. Rurſus in iiſdem numeris inverſis 2, 4. 3, 6 multiplicatis inter ſe tum antecedentibus tum conſequentibus oritur ratio 6 ad 24 ſive 1 ad 4, quæ eſt duplicata rationis 2 ad 4. Rurſus ſint rationes non eædem, ut in his numeris 4, 2. 6, 4 multiplicatis tum antecedentibus tum conſequentibus gignetur ratio 24 ad 8 ſive 12 ad 4. Expoſitis autem his numeris 12. 6. 4, erit ratio 12 ad 6 eadem cum ratione 4 ad 2, & ratio 6 ad 4 eadem quæ antè. Idem in horum converſis continget 2, 4. 4, 6. Atq; hinc intelligere licet quid ſint illæ quas appellat *Euclides* rationum *quantitates*, nempe rationum antecedentes & conſequentes. Nec tamen voluit tantam eſſe rationem quanta eſt antecedens, aut quanta eſt conſequens ejus; quarum utraq; eſt quantitas abſoluta; ſed neutra earum ratio. Quantitatem autem rationis 4 ad 2 interpretatur *Clavius* per fractionem $\frac{4}{2}$, & rationem 6 ad 3 per $\frac{6}{3}$, quas appellat etiam rationis Denominatores; quas ſi inter ſe multiplices, habebis quidem fractionem cujus Numerator ad Denominatorem rationem habet compoſitam ex rationibus 4 ad 2 & 6 ad 3; propterea quod etiam ſic multiplicantur inter ſe tum antecedentes tum conſequentes ut prius; non eſt autem fractio $\frac{24}{6}$ nec $\frac{4}{1}$ ratio compoſita, nec omnino ratio, cum ſit pars quantitatis abſolutæ. Aliud enim eſt $\frac{4}{1}$ id eſt 4, aliud ratio quaternarii ad unitatem. Ratio enim duabus lineis exponitur ſemper, at quantitas abſoluta unica.

Quod *Clavius* hic scribit, *Quoniam denominator cujuslibet proportionis exprimit quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem, dici solet propterea quantitas rationis.* Rectè quidem dicit *exprimit*, non rectè autem Arithmetici dicunt *esse*, nempe quotientem Divisionis numeri per numerum esse rationem ipsam Divisi ad Divisorem, unde multa in Geometriam irrepserunt absurda, & plura indies consequentur; quorum causa magna ex parte fuit *Clavii* hæc impropria locutio. Qualis etiam videtur tibi hæc oratio in Mathematicis, *quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem?* Debebat enim dicere, *quanta est magnitudo antecedens ut comparata cum consequente*, vel *quanta est ratio magnitudinis antecedentis ad magnitudinem consequentem?* Scio *Clavium* Linguæ Latinæ scientissimum fuisse, sed huic illius sententiæ de compositione rationum inimica erat elocutio clara.

CAP. XV.

Etiam de Rationum Calculo.

CLavius ex hac Def. 5^a. El. 6^i. recte infert, *Quod in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio primæ ad ultimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c.* Cujus etiam demonstrationes aliquot adfert ex *Theone, Vitellione, Eutocio & Apollonio*, ita ut nullo modo a *Clavio* negari possit, qui eandem (in numeris) pro definitione ad El. 7^m. posuit. Itaq; in tribus lineis A, B, C ordine expositis ratio A ad C, componitur ex rationibus A ad B, & B ad C; & rursus ratio C ad A componitur ex ratione C ad B & ratione B ad A.



CAP XV

Per definitionem 5^{am}. El. 5^i. quæ hæc est, *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuò superare* explicat *Euclides* (ut

rectè dicit *Clavius*) quidnam requirant duæ quantitates ejusdem generis ut rationem dicantur habere, nempe, si non habeant hanc conditionem ut altera possit multiplicata alteram superare, non esse illas neq; ejusdem generis, neq; habere inter se Rationem.

Unde manifestum est primò Lineam, Superficiem, & Solidum esse diversa genera, vel potius diversas species quantitatis. Nulla enim harum quantumvis multiplicata alteram superabit.

Secundò, Angulus genitus ex motu circulari, & Angulus Contactus, diversæ sunt species quantitatis. Angulus enim Contactus nulla unquam multiplicatione superabit Angulum genitum ex motu circulari.

Tertiò, Ratio majoris ad minus, & ratio minoris ad majus, sunt diversæ species quantitatis. Nam ratio minoris ad majus quanto magis multiplicatur tanto semper minor est.

CAP. XVI.

Etiam de Rationum calculo.

CLavius ad Prop. 23. El. 16. aliam habet methodum componendi rationes. Sint duæ rationes 6 ad 4, & 2 ad 8 componendæ. Fiat ut 2 ad 8, ita consequens 4 ad aliam 16; eritq; ratio 6 ad 16 composita ex rationibus 6 ad 4, & 2 ad 8. Positis enim ordine his numeris 6, 4, 16, priores duæ habent rationem 6 ad 4, posteriores duæ rationem 2 ad 8.

Habet etiam methodum auferendi rationem minorem a majore. Sit ratio 1 ad 4. auferenda ratione 2 ad 4. Fiat ut 2 ad 4 ita antecedens 1 ad aliam 2; & collocentur ordine tres numeri 1, 2, 4. Ratio 1 ad 4 componitur ex rationibus 1 ad 2, & 2 ad 4. Quare ablata ratione 2 ad 4 ex ratione 1 ad 4, reliqua est ratio 1 ad 2.

Similiter si ex ratione 3 ad 2 auferenda sit ratio 2 ad 3, fiat ut 2 ad 3, ita 3 ad aliam $4\frac{1}{2}$. Nam positis ordine, 3. $4\frac{1}{2}$. 2, ratio 2 ad 3, id est ratio 3 ad $4\frac{1}{2}$ aufertur a ratione 3 ad 2, & relinquitur

quitur ratio $4\frac{1}{2}$ ad 2. Atq; hæ methodi ambæ comprobantur a *Clavio* ad Prop. 23. El. 6.

Cap. XVII.

Responsio ad quædam quæsita Clavii.

REspondeo jam ad quæsita *Clavii*, & primo ad hoc, *Qui fieri potest ut positis tribus magnitudinibus æqualibus* 4, 4, 4 *ratio primæ ad tertiam dupla sit rationis primæ ad secundam, cum sit omnino eadem?*

Quoniam ratio primæ 4 ad secundam 4, quantumvis multiplicata nunquam superabit rationem eandem 4 ad 4 neque quantumvis per medias interpositas divisa ab illa superabitur, manifestum est rationem 4 ad 4 (& in universum) æqualis ad æquale) non esse quantitatem, neq; posse æqualitates alias aliis majores vel minores esse. Inæqualitatum autem alia alia major esse potest, & proinde habet quantitatem. Jam quod quærit *Clavius* quomodo positis ordine 4, 4, 4 ratio primæ ad tertiam dupla esse potest rationis primæ ad secundam idem est ac si quæsiisset quomodo positis tribus cifris o, o, o ratio primæ ad tertiam potest esse dupla rationis primæ ad secundam; cum revera & propriè loquendo, unum nihil, alterius nihil neq; duplum neq; duplicatum est.

Rursus *Clavius* ad finem El. 9[i]. ut probet rationem duplicatam, non esse rationem duplam, sic scribit. *Imprimis igitur compositionem proportionum* (vocabulis enim ratio & Proportio aliter quam *Euclides* promiscuè utitur) *de qua Euclides agit Def.* 10. *Lib.* 5, *&c. & in propositionibus duplicatam triplicatam, & compositam proportionem de magnitudinibus vel numeris demonstrat, dico non esse verè additionem proportionum, ita ut duplicata vel triplicata proportio sit duplo aut triplo major ea proportione cujus illa dicitur duplicata, triplicatave; item ut proportio ex pluribus proportionibus composita sit verè totum quippiam, cujus partes sunt proportiones ex quibus dicitur composita. Nam, &c. Si positis his terminis continuè proportionalibus* 1. 10. 100,

proportio 1 *ad* 100 *non solùm duplicata diceretur proportionis* 1 *ad* 10, *sed verè esset duplo major, &c. quis non videt partem esse majorem toto?*

Respondeo primò non videri mihi rectè illatum ex eo quod 1, 10, 100 sunt continuè proportionales & ex eo quod ratio 1 ad 10 majus sit ratione 1 ad 100, partem esse majorem toto.

Secundò, si illatio legitima sit, necesse est, quanquam absurda sit, sit tamen vera. Nam ipse *Clavius* utrumq; affirmat (nec quisquam negat) nempe, & rationem 1 ad 100 esse totum, cujus pars est ratio 1 ad 10; & rationem 1 ad 10 majorem esse ratione tota 1 ad 100. Itaq; si qua hic verè subsit adsurditas, *Clavii* est, nec solùm illorum qui dicunt rationem duplicatam esse duplam. Latet autem illa vel in assumpto hoc, *In magnitudinibus quibuscunq; ordine positis, rationem primæ ad ultimam composita est ex rationibus intermediis*; vel in diverso genere rationis majoris ad minus a genere rationis minoris ad majus. Quare proprietates tum rationum ordine positarum, tum utriusque generis rationum diligentiùs paulo considerabimus.

Et primo, in rationibus ejusdem generis, sive magnitudines decrescant perpetuò a majore ad minus, sive perpetuò crescant a minore ad majus, compositio vera est. Sint enim tres numeri 100, 10, ~~1~~, quæ rationes sunt majoris ad minus. Manifestum est rationem 100 ad 1 compositam esse ex rationibus 100 ad 10, & 10 ad 1, eandemq; tum duplicatam tum duplam esse rationis utriusvis 100 ad 10, vel 10 ad 1. Item inversim, ubi rationes 1, 10, 100 sunt minoris ad majus, manifestum est rationem compositam 1 ad 100 æqualem esse ambabus rationibus 1 ad 10, & 10 ad 100 inter se æqualibus.

Deinde in his numeris 16, 4, 2 manifestum est rationem compositam 16 ad 2 æqualem esse duabus rationibus 16 ad 4, & 4 ad 2, quarum prima ratio secundæ est duplicata, tota autem ejusdem secundæ triplicata. Item in his numeris illorum inversis 2, 4, 16 composita ratio 2 ad 16 æqualis est duabus rationibus quarum secunda est primæ duplicata, composita autem ejusdem primæ triplicata.

Etiam in tribus aliis quibuslibet magnitudinibus quarum prima

prima est maxima, tertia vero minima, idem continget; ut in his numeris 12, 8, 2, ubi ratio primæ ad secundam est eadem quæ 3 ad 2, ratio autem secundæ ad tertiam eadem est quæ 2 ad $\frac{1}{2}$. Componamus has primò juxta definitionem traditam ab *Euclide*, Def. 5. El. 6, per multiplicationem inter se tum antecedentium, tum consequentium. Oritur autem ratio 12 ad 2, cujus partes componentes erunt rationes 3 ad 2, & 2 ad $\frac{1}{2}$; id est (multiplicatis omnibus terminis per 4) ratio 12 ad 2 composita ex rationibus 12 ad 8, & 8 ad 2.

Deinde componamus easdem per regulam compositionis aliam traditam a *Clavio* ad Prop. 23. El. 6i. Fiat ergo ut 8 ad 2, ita 2 ad aliam $\frac{1}{2}$. Expositisq; numeris 3, 2, $\frac{1}{2}$, erit ratio composita 3 ad $\frac{1}{2}$ æqualis rationibus componentibus 3 ad 2, & 2 ad $\frac{1}{2}$. Nam multiplicatis omnibus terminis per 4, nascentur numeri 12, 8, 2 iidem qui prius.

Itaq; nihil video quo minus propositio illa, nempe, *ratio primi ad ultimum composita est ex rationibus intermediis* pro vera habeatur. Adverto etiam obiter rationes componendi Methodum hanc Clavianam esse veram rationum Additionem. Non autem ut vult *Clavius* Multiplicationem.

Quomodo autem eadem propositio, nempe, *rationem primi ad ultimum compositam esse ex rationibus intermediis*, locum habeat quando una ratio est majoris ad minus, altera minoris ad majus difficile explicatu est. Sint continuè proportionales 1, 10, 100. Sed alio ordine collocatæ, ut 1, 100, 10. Cum ergo per propositionem illam universalem, ratio 1 ad 10 composita est ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10, sicut totum ex partibus, erit ratio 1 ad 100 pars rationis 1 ad 10. Sed quota pars? Ea scilicet pars quam Geometræ nunc appellant subduplicatam rationis 1 ad 10. Quia vero ratio 1 ad 100 minor est quam ratio 1 ad 10, erit pars 1 ad 100 minor quam reliqua pars quanto ratio una minor est quam duæ & sunt ambæ rationes 1 ad 100, & 100 ad 10 partes rationis 1 ad 10, si modo ratio 100 ad 100 (quæ quantitas non est) pro quantitate computetur; alioqui ratio 100 ad 10 non potest esse pars rationis 1 ad 10. Neq; enim duæ quantitates diversi generis, quales ostendi suprà esse rationes minoris ad majus, & majoris ad minus, partes ejusdem quantitatis esse possunt.

Quo ergo ſenſu, inquies, verum eſt componi rationem 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10? Reſpondeo, verum eſſe ſecundum verborum ſenſum proprium, nimirum ſi ratio 100 ad 10 ſive ratio 10 ad 1 addatur rationi 1 ad 100 naſci rationem compoſitam 1 ad 10 æqualem duabus rationibus 1 ad 100, & 1 ad 10. Id quod facilius intelliges, ſi prius duo illa genera rationum quomodo creſcunt, minuuntur, componuntur, & alterum ab altero ſubſtrahitur, clarè explicavero.

Sumantur ergo quinq; magnitudines continue proportionales in ratione majoris ad minus, exempli cauſa, 81, 27, 9, 3, 1, quarum inverſæ 1, 3, 9, 27, 81. ſunt in ratione continua minoris ad majus; & media omnium eſt 9. In his, incipiendo a maxima deſinendo in media tres primæ ſunt rationes majoris ad minus; incipiendo autem a minima, deſinendo in media, tres primæ ſunt rationes minoris ad majus.

Rurſus incipiendo a maxima, ratio primæ ad tertiam eſt major ratione ejuſdem primæ ad ſecundam, nempe duplo major; Contrà incipiendo a minima, ratio primæ ad tertiam minor eſt ratione primæ ad ſecundam, nimirum duplo minor.

Tertio, incipiendo a maxima, ſemper prima majorem rationem habet ad eam quæ propior eſt tertiæ, quam ad eam quæ ab eadem tertia eſt remotior; Contrà vero incipiendo a minima, ſemper prima minorem rationem habet ad eam quæ tertiæ propior eſt quam ad eam quæ a tertia eſt remotior.

Quarto, incipiendo a maxima, rationes ſunt exceſſuum quibus majores ſuperant minores; Contrà verò incipiendo a minima, rationes ſunt defectuum quibus minores deficiunt a magnitudine majorum.

Quinto, ratio tertiæ ad tertiam (quæ eſt æqualitas) in rationibus exceſſuum minor eſt omni ratione exceſſus; contrà verò, ratio æqualitatis major eſt omni ratione defectus; & quia ratio æqualitatis quantitas non eſt, erit quantitas rationis defectus minor nihilo, tanto quanto ratio exceſſus ipſi reſpondens major eſt nihilo.

Exempli gratia exponantur in margine eædem magnitudines proportionales; & quia ratio 81 ad 9

81.	27.	9.	3.	1.
2.	1.	0.	1.	2.

duplicata eſt rationis 27 ad 9, ſub 81 ponatur 2; & ſub 27 ponatur 1, quæ ſignificent duplicatam rationem & unam rationem; ponatur autem cyphra ſub 9, propterea quod ratio 9 ad 9 quantitas non eſt. Similiter ſub 1 ponatur 2, & ſub 3 ponatur 1. Vides itaq; rationem 81 and 9 duplo majorem eſſe ratione 27 ad 9, quia rationes illæ ſunt ut duæ rationes exceſsûs ad unam; item rationem 1 ad 9 duplo minorem eſſe ratione 1 ad 3, propterea quod ſunt ambæ rationes defectûs. Quoniam igitur ratio 1 ad 9 duplo minor eſt quam ratio 1 ad 3, manifeſtum eſt rationem 1 ad 3 duplo majorem eſſe quam ratio 1 ad 9.

His intellectis oſtendendum eſt quomodo in his numeris 1. 100. 10, ratio 1 ad 10 componitur ex rationibus 1 ad 100, & 100 ad 10.

Quoniam enim rationes 100 ad 10 & 10 ad 100 ſimul additæ faciunt rationem æqualitatis, id eſt altera alterius quantitatem extinguit, reſtabit ratio 1 ad 10 pro ſumma rationum 1 ad 100 & 100 ad 10; Ut qui unum dederit carenti duobus, facit ut careat tantummodo uno.

Atq; hoc exactè convenit cum Def. 5ª. El. 6ⁱ. Nam antecedentes rationum 1 ad 100, & 100 ad 10, ſunt 1 & 100; conſequentes autem 100 ad 10. Antecedentes in ſe multiplicatæ faciunt 100; conſequentes autem multiplicatæ in ſe faciunt, 1000, ſed ratio 100 ad 1000 eadem eſt cum ratione compoſita 1 ad 10. Componitur ergo ita ratio 1 ad 10 ex rationibus 1 ad 100 & 100 ad 10, ut partes componentes ſint vere partes rationis compoſitæ. Sed rationes 1 ad 100 & 100 ad 10 non ſunt partes ejuſdem rationis compoſitæ 1 ad 10; neq; eſſe poſſunt, cum ſint diverſi generis rationes.

Vides ergo rationem duplicatam duplam quoq; eſſe, hoc eſt duplo majorem eſſe ratione quæ duplicari dicitur. Ut in iiſdem proportionalibus 1. 10. 100. ratio defectus; 1 ab 100 duplicata eſt rationis defectus 10 ad 100 (duplicata ſcilicet defectus ratione) & propterea etiam duplo major, quia ſublatio defectus quantitatem auget.

Manifeſtè hinc ſequitur Theorema hoc univerſale.

Si fuerint quotcunq; magnitudines continuè proportionales,

nales, quarum prima eſt maxima; quanto prima ad aliam a ſe remotiorem quam eſt proxima, majorem rationem habet quam ad ipſam proximam; tanto in iiſdem magnitudinibus, inverſo ordine collocatis, minima majorem rationem habet ad ſibi proximam, quam ad remotiorem in eadem diſtantia. Exempli gratia, in his magnitudinibus, 81. 27. 9. 3. 1. quanto major eſt ratio 81 ad 3 quam ratio 81 ad 27; tanto major eſt ratio 1 ad 3 quam ratio 1 ad 27, quanquam Geometræ qui nunc ſunt id non concedant.

Sed ex iis quæ hactenus dicta ſunt, conſtat naturam Rationis ne *Euclidi* quidem penitus perſpectam fuiſſe; multo autem minus *Clavio*; ſed minime omnium illis qui nunc Algebriſtæ perhibentur. Nam hi, a *Clavio* docti denominatorem rationis indicare ipſius quantitatem (ut 4 ſive $\frac{4}{1}$ denominat, indicatq; quantitatem rationis 4 ad 1, & $\frac{2}{3}$ indicat rationem 2 ad 3) ſunt autem illi denominatores nihil aliud præter Quotientes natas ex diviſione numeri per numerum, temerè arripuerunt quaſi rem demonſtratam, *Fractionem & Rationem eandem eſſe rem*, nempe quantitatem abſolutam & quantitatem comparativam; quæ comparativa, quantitas omnino non eſt niſi reſpectu ad aliam rationem. Rationis enim magnitudo non determinatur, nec exponitur per unam lineam ſicut quantitas abſoluta, ſed per duas. Atq; ab hoc errore tot abſurda conſequuta ſunt, ut vix magno volumine commodè contineri poſſint; quorum præcipua infrà paucis conſiderabimus, unà cum aliis quæ ex aliis principiis falſis in Geometrarum ſcripta irrepſerunt.

Numerat duodecem alia genera rationum *Pappus*, quorum duo conſiderat in commentario ad Def. 6. El. 5. *Clavius*, nimirum rationem Arithmeticam & rationem Harmonicam ſive Muſicam. Atq; Arithmeticæ quidem ſatis bene convenit Definitio rationis tradita ab *Euclide*. Nam quantitates duæ quarum una alteram ſuperat quantitate determinata habent inter ſe habitudinem quandam ſecundum quantitatem. Ratio autem quam Harmonicam vocant eſt habitudo quædam non duarum ſed trium magnitudinum. De utraq; ſatis multa & ingenioſa habet *Clavius*. Ratio autem Arithmetica eadem

eſt,

eſt, cum quanto prima ſuperat ſecundam vel ab ea ſuperatur, tanto ſecunda ſuperat tertiam vel ab ea ſuperatur. Sed ratio Harmonica eadem eſt, quando extremæ ſunt inter ſe ut differentiæ a media ſumptæ, major extrema ad majorem differentiam, & minor ad minorem.

Putaſne in aliis Scientiis majus peccatum inveniri poſſe quam eſt in Geometria non rectè explicaſſe quid ſit Ratio? Quis ſcriptor Ethicus uſus eſt definitione *Boni* non bona, vel Politicus definitione *Juris* vitioſa? Attamen ejuſdem eſt in Geometria momenti definitio Rationis cujus eſt in doctrina Ethica definitio *Boni*, & in Politica definitio *Juris*?

Deinde, quod dicit *Clavius*, proportionem illam in tribus numeris ubi major extremorum eſt ad minorem ut differentia majoris & medii ad differentiam medii & minoris, eſſe Muſicam ſeu Harmonicam, temerè dictum eſt. *In his* (inquit) *numeris 6. 4. 3, eſt ut 6 ad 3, ita 2 differentia duorum majorum, ad 1 differentiam duorum minorum. Quoniam autem 6 & 3. faciunt conſonantiam Diapaſon; 6 & 4 conſonantiam Diapente; & denique 4 & 3 conſonantiam Diateſſaron, vocari ſolet hæc proportio Harmonica.* Quod ſi ita ſit, cur non etiam in his numeris 6. 3. 2. vel in his 42. 12. 7. quæ cadunt ſub eandem definitionem, eædem ſunt conſonantiæ: Quare autem facit ratio 6 ad 3, vel totum quodlibet ad ſuum dimidium, conſonantiam Diapaſon, neſcivit *Clavius*. Id enim primus omnium docuit *Galilæus*, poſtquam *Clavius* mortuus eſſet. Nugæ meræ ſunt homine Mathematico indignæ. Hactenus de Principiis *Euclidis*. Sequitur Principium aliud quibus utuntur hodie Geometræ tale.

Cap. XVIII.

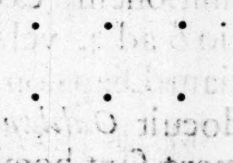
De Radice numerica, & Latere Quadrati.

SI quadrati duo latera angulum rectum continentia diviſa fuerint, utrumq; in quotlibet partes magnitudine & numero æquales, numeruſq; partium unius lateris multiplicatus

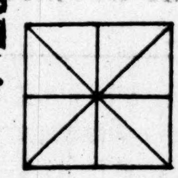
tus sit per numerum partium alterius (id est si duo illi numeri æquales multiplicentur inter se) factus erit numerus quadratorum quorum latera sunt singulæ partes lateris totius quadrati. Exempli gratia, si quadrati latus sit longum 100 pedes, multiplicentur autem 100 pedes per numerum 100, unde factus erit decies mille pedes, erunt (ut illi assumunt) illi decies mille pedes, totidem quadrata, quorum uniuscujusq; latus sit unus pes; & decies mille pedes longitudine simul sumptos æquales esse toti quadrato. Similiter multiplicatis 1000 pedibus per numerum 100, oritur Cubus a toto latere. Potuerunt eadem ratione diviso latere quadrati bifariam, ex multiplicatione 2 in 2 pronuntiare quatuor semilatera æqualia esse ipsi quadrato.

Hæc tu absurdiora esse putabis quam ut quisquam ita computaret. Sed ita est; nec moniti ab illa computatione desistunt. Ita computavit Geometra quidam qui propter Librum quem inscripsit Mesolabium celebris est, monitusq; erroris respondit, ita se computasse sicut computarunt Geometræ omnes qui fuerunt, qui sunt, & qui post erunt aliis in annis. Nihil ergo hic calumniæ est. Quid autem illos a sensu communi seducere tantum potuit?

Decepit illos Primò, idea quadrati numeri qualis appingitur, in qua latera multiplicata in se faciunt numerum quadratum.



Secundò decepit illos, quod crediderint, eandem esse rem, multiplicare partes inter se, & ducere unum latus in alterum, juxta ideam quadrati Geometrici tale, ubi tria latera multiplicata per 3 æqualia esse volunt in ipsi quadrato.



Tertiò, decepit illos authoritas Archimedis (cujus hominis propter stupendissimum ingenium mentionem hoc loco invitus facio) qui magnitudinem circumferentiæ circuli per hujusmodi multiplicationem demonstrare conatus est. Deinde sæculo proximè superiore in calculo *Subtensarum*

tensarum eadem methodo usus est *Copernicus*, & *Regiomontanus* in doctrina Triangulorum, & postremò *Clavius* in Tabulis condendis Sinuum, Tangentium, & Secantium.

Ex hoc errore nascitur alius, nempe, Radicem numeri quadrati esse quadrati Geometrici latus. Siquidem enim multiplicatio numeri producat quadratum Geometricum, necessariò sequetur radicem numeri facti esse ipsum latus. Non videbant enim, in numeris quadratum numerum & radicem ejus, esse ambo earundem rerum numeros; & proinde radicem numeri quotcunq; quadratorum, numerum esse etiam quadratorum, quemadmodum radix centum hominum sunt decem homines.

Postremo decepit illos, quod eandem rem esse putarint latus quadrati Geometrici, & Radicem quadrati numeri. Itaq; regulam Algebræ, quæ regula est purè Arithmetica, ad Geometriam imperitè applicantes ex ingeniosissima reddiderunt absurdissimam, pro Linea, Quadrato, & Cubo, Unitatem promiscuè supputantes. Exempli gratia cum scripsisset quidam, Si AD ponatur dupla DV & a tota AV detrahatur AS media proportionalis inter ipsas AD, & DV, quæ relinquitur VS erit major duarum Mediarum proportionalium inter ipsas AD, DV; ad hoc confutandum sic ratiocinatus est Professor quidam Geometriæ publicus.

CAP XVIII: 2

Ponatur DV æqualis 1. AD erit 2. Ponatur AS media proportionalis inter AD, DV, & detrahatur ab AV. Relinquetur VS.

Ergo VS æqualis est 3 minus radice 2.

Quæ multiplicata in se Cubicè facit 45 minus Radice 1682, quod minus est quam quatuor Cubi a DV; quia 45 minus Radice 1681, æquales sunt quatuor Cubis a DV.

Cum ergo Cubus ab AD sit 8, erit Cubus ab VS minor dimidio Cubo ab AD, id est minor majore Mediarum inter AD & DV.

Non disputo hoc loco an major Mediarum duarum revera

ſit V S, ſed ſpecimen exhibeo Algebræ hodiernæ, per quam D V eſt linea 1, & per conſequens A D eſt 2 lineæ; & per conſequens (ſecundum hujuſmodi Algebriſtas) Cubus A D æqualis eſt 8 lineis; & 45 quadrata a D V minus Radice 1681 æqualia quatuor lineis, nempe, quadruplus rectæ D V.

Reputa tecum an hæc non ſint magis abſurda quam ulla quæ inveniri poſſunt in Ethicis aut Politicis *Platonis* aut *Ariſtotelis*.

Regula autem Algebræ talis eſt, Theorema quod quæritur, ſupponatur verum eſſe; vel quod faciendum eſt ſupponatur factum. Ex eo ſuppoſito (aſſumptis aliis cognitis) inferatur concluſio, & ex his aliæ concluſiones, donec veniatur ad Principia, aut ad vera aliunde cognita, quot ſufficiunt ad ſuppoſiti demonſtrationem, vel donec veniatur, ſi ita contingat, ad abſurdum aliquod. Nam ſi ducaris ad vera quot ſufficiunt ad demonſtrationem, ex illis veris converſis ſuppoſitum demonſtrabitur; ſin incidas in abſurdum, falſum eſſe ſcis.

Hac uſus eſt methodo primus (quantum ſcio) Diophantus, paucis adhibitis notis (præter literas) ſymbolis Radicum, Quadratorum, Cuborum. Nunc autem tota Algebra aucta ſymbolis ab Oughtredo, & Carteſio, & ab his ad Geometriam applicata nomen obtinuit Geometriæ ſymbolicæ; infecitq; hujus ævi Geometras, Geometriæ veræ peſtis.

Dixi de Principiis. Videamus nunc an non ſit etiam aliqua *Euclidis* vel *Clavii* demonſtratio cujus forma ſit illegitima.

CAP. XIX.

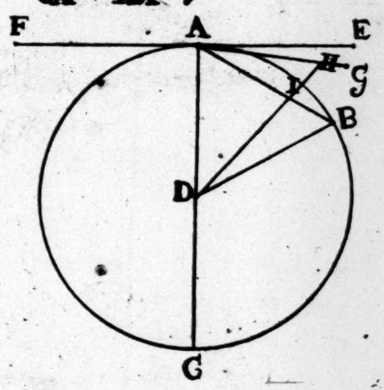
Prop. 16. El. 3. examinata.

Quæ ab extremitate diametri cujuſq; circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet: & in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum, altera recta linea non cadet, & ſemicirculi quidem angulus quovis angulo

angulo acuto rectilineo major est; reliquus autem minor.

In circulo A B C, cujus centrum D, diameter sit A C, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est A B; ducta D B: erunt duo anguli D A B, D B A æquales; sed D A B rectus est per constructionem: Igitur & D B A rectus erit, quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neq; eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est E F. Dico jam ex A, inter A E, rectam & circumferentiam A B, non posse cadere alteram rectam.

CAP: XIX 1



Hæc est demonstrationis *Euclidis* (interprete *Clavio*) pars prima; quam dico vitiosam esse. Primò, quod punctum A dicit esse neq; intra circulum neq; in circumferentia ejus. Cum enim punctum A sit terminus semidiametri D A, a qua describitur circumferentia A B C, necesse est ut punctum A sit in ipsa circumferentia. Intulit ergo hanc conclusionem contra ipsam *Euclidis* constructionem, qui supponit perpendicularem F E duci ab extremo puncto diametri. At concesso punctum A non esse in circumferentia, sed perpen-

dicularem

pendicularem F E solummodo radere sive tangere circulum in A; erit tamen punctum A extra circulum & ab eo separabile, more contiguorum. Itaq; ductâ per terminum diametri rectâ quadam parallela ipsi Tangenti F E, illa cadet inter rectam A E & arcum A B, contra demonstrationem hujus partis primæ. Perpendicularis enim ducta per terminum diametri non erit ipsa Tangens A E, sed ipsi parallela, nec secabit circulum, sed habebit punctum cum circulo commune, nempe ipsius diametri terminum.

Deinde quoniam utriusq; semicirculi sunt duo termini, erunt in duobus semicirculis contiguis, ad terminum diametri, duo puncta. Nihil ergo prohibet, quicquid sit punctum, quin duobus terminis pro uno sumptis, diameter unà cum minutissima parte arcus (cum plusquam punctum illud Geometrarum, *nihil* commune sit rectæ perpendiculari & arcui) haberi possint pro lineis quæ faciunt angulum rectum. Nam crura angulorum de anguli essentia omnino non sunt; & sic falsum quoq; erit quod in tertia parte demonstrationis ponit, *angulum quem facit perpendicularis cum arcu, quovis angulo acuto rectilineo esse minorem.*

Porrò in secunda & tertia parte demonstrationis sic dicit, *Quoniam ostensum est omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem A E, cadere intra circulum, faciet necessario ea linea cum A C, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi; at verò cum A E, angulum rectilineum acutum majorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta A B, quomodocunq; infra A E. Nam cum hæc linea A B, intra circulum cadat, ut demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus C A B, minor angulo semicirculi contento sub diametro A C, & circumferentia A B C, cum ille hujus sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea A E, & circumferentia A B C, minor angulo rectilineo acuto B A E, quod ille hujus pars sit.*

Assumit hic *Euclides* angulum rectilineum CAB partem esse anguli semicirculi, id est anguli facti a recta C A, & circumferentia AB; item angulum contingentiæ partem esse anguli

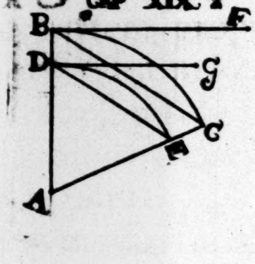
rectilinei

ctilinei E A B. Sed ex eo manifeste sequitur, Quatuor angulos, nempe rectilineum C A B, angulum semicirculi, angulum contingentiæ, & angulum rectum rectilineum esse ejusdem generis, sicut partes & totum. Et per consequens angulum contingentiæ (per Def. 5. El. 5.) multiplicatum posse superare angulum rectum rectilineum. Manifestum enim est partem multiplicare posse donec suum totum superet. Contradicit ergo *Euclides* huic definitioni suæ quintæ Elementi quinti. Cum ergo angulus contactus, & angulus rectilineus sint diversi generis quantitatis, ita ut altera alteram multiplicata superare non possit (ut ipse *Clavius* demonstrat) angulus contingentiæ ablatus nihil auferet ab angulo recto rectilineo, non magis quam linea ablata aliquid aufert a quadrato aut superficies a solido. Itaque angulus semicirculi angulo recto rectilineo est æqualis.

Itaq; manifestum est angulum contingentiæ, etsi quantitas sit, non tamen esse quantitatem anguli, sed quantitatem diversi generis, nempe curvedinis; ut supra ostensum est. Erravit ergo hoc loco *Euclides*, deceptus a sui ipsius definitione Puncti. In controversia autem inter *Clavium* & *Pelletarium* de angulo contactus veritas erat a parte *Peletarii*, qui sustinuit angulum contactus quantitatem non esse illius anguli, & angulos semicirculorum rectos esse omnes, & inter se æquales.

Quod autem anguli semicirculorum sunt inter se æquales, ex eo quoque intelligere potes, quod supra demonstravi, Similium arcuum æquales esse curvedines. Itaque descriptis duobus Sectoribus similibus A B C, A D E; ductisque Tangentibus B F, D G, & subtensis B C, D E, æqualiter declinabunt arcus B C, D E a Tangentibus B F, D G propter æqualitatem curvedinis

CAP XIX. 2



vedinis sive flexionis primæ a punctis B & D. Æquales ergo utrobique sunt anguli contingentiæ, & (per consequens) etiam anguli semicirculorum.

Judicabis item de doctrina hac *Clavii* ex fœtu. Nam monstra inde nata sunt, Primum hoc ipsum, *Angulos semicirculorum esse inæquales.* Contrarium enim lumine naturali satis manifestum est. Secundum hoc, *Transitur a minore ad majus, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Id quod nemo cogitans non videret esse falsum. Sed ita est ut nemo ferè hodie Philosophetur suo, sed Magistri alicujus ingenio; ideoque in absurda incidunt, non aliter quam totidem oves principem gregis sequentur, etsi in mare se præcipitaret.

Cap. XX.

De Dimensione Circuli.

PRincipia ista quæ supra a me reprehensa sunt, mirum est etiam quantum ad pulcherrima Geometriæ Problemata invenienda viam obstuxerunt; quorum exempla aliqua hic sibi exhibere operæ pretium esse puto.

Sit quadratum A B C D. Centro A, intervallo A B, descriptus sit circuli quadrans A B D. Secentur latera A D, B C bifariam in E & F. Ductâ E F secante arcum B D in G, erit arcus B G totius arcus B D pars tertia.

Per punctum G ducatur recta I G K parallela lateri B C secans A B in I, & C D in K, producaturq; ad H, ita ut I H sit tripla I G; deniq; per H ducatur recta N O indefinita, et parallela D C.

Ducatur B G chorda arcus B G, & producatur ad N O in O secans C D in P. Deinde centro B intervallo B O describatur arcus circuli secans B N productam in Q.

Porrò lateri B A adjungatur in directum A R æqualis duplæ G F, & ducta R D (quæ æqualis erit duplo lateri A D) producatur ad latus B C productum in S, +eritq; C S æqualis Tangenti 30 graduum; transibit autem R S per H terminum semiradii K H. Ducatur Q *a* parallela N H secans R S in *a*. Compleaturq; parallelogrammum B Q *ab*. Postremò diviso arcu B G bifariam in *c* ductoq; sinu arcus B *c* jungatur R *c*. Hactenus constructio.

+ Erit ergo Sinus arcus B *c* sexta pars rectæ *ba* & ipsi parallelus; ideoq; vel in ipsa *ba* vel supra, vel infra. Sumatur A *d* sexta pars A D, & ducta R *d* productaq; ut secet *ba*, abscecabit sextam ejus partem (propter A *d*, *ba* in triangulo R *ba* parallelas.) Quare abscecabit in *ba* rectam æqualem Sinui arcus B *c*. Quod impossibile est nisi *ba* transeat per *c* cum sit ut A *d* ($\frac{1}{6}$ A D) ad A D, ita Sinus arcus B *c* ad sextuplum Sinum arcus B *c*. Transit ergo *ba* per *c*.

Eodem modo si arcus B *c* secetur bifariam fient arcus duodecem,

+ quia $Gg = BE = \frac{1}{2}$ AD erit ... et GF ... ergo AR = √ ... RD = √12 + ... = 4 = 2 A...

+ CDS triang: ADR ... quia $Dg = \frac{1}{2}$ AD ... $\frac{1}{2}$ AR ergo C... = 8 v. tang. 30 grad:

+ sinus Bc erit $\frac{1}{2}$ chorda BG. at BG : GP. PO sun...

decem, & Sinus eorundem totidem, qui Sinus semper erunt simul sumpti minores arcu B D, majores tamen recta *ba*. Eadem methodo bisecando in perpetuum, ostendi potest, rectam omnem ductam infra B S ipsiq; parallelam, terminatam in rectis A B, D S minorem esse arcu B D; & (per consequens) rectam B S (compositam ex radio & Tangente 30 graduum) non esse arcu B D majorem. Minor autem esse non potest, cum locus nullus ulteriori bisectioni relictus sit. Etiam Geometræ omnes qui magnitudinem circuli determinarunt, arcum B D faciunt minorem quam est recta B S. Habes ergo demonstrationem quadraturæ circuli verbis haud multo pluribus quam quæ sunt in constructione.

...issimum est
scilicet $\frac{1}{6}$ recte
esse = sinui Arcus
at nullo modo
...tur: sinus arcus
...= $\frac{1}{12}$ circ...
...recte linea at
a ...

Coroll. 1. Si jungatur recta R G secans A D in *f*, producta *ba* in *e*, & B S in *i*, erit B *i* tertia pars rectæ B S, & æqualis arcui B G, & *be* æqualis chordæ B G, & A *f* æqualis Radio circuli cujus quadrans æqualis est arcui B G; & A *d* radius arcus cujus quadrans circuli æqualis est arcui *bc*, & in universum omnes rectæ ductæ ab R ad arcum B G, secabunt A *f* & arcum B G in ratione radii ad quadrantem a se descriptum. Ex quo sequitur facilis divisio arcus sive anguli in ratione data, ut infra patebit ad cap. 23.

Cor. 2. Juncta A S secante C D in L, erit D L æqualis semidiametro circuli cujus perimetri quartæ parti æqualis est radius A B. Sunt enim S B, A B, D L (propter similitudinem triangulorum S B A, A D L) continuè proportionales. Est autem S B ad A B ut quadrans perimetri ad radium. Quare & A B ad D L est ut quadrans perimetri ad radium, nempe D L.

Cor. 3. Sumpta in A D parte A M æquali rectæ D L, ductaq; R M, & producta ad B S incidet in C. Cum enim A D sit radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis B S, & A M radius circuli cujus perimetri pars quarta est æqualis A B & rectæ omnes ductæ a puncto R secant B S, A D in ratione quartæ partis perimetri ad Radium, recta R M producta incidet in C.

Cap. XXI.

De Magnitudine Circuli Hugeniana.

DEterminationem hanc magnitudinis arcus BD tanta diligentia a Geometris omnis ævi summis quæsitam, quamq; veram esse tam manifestè modo demonstravi, quam manifestè ulla apud *Euclidem* propositio demonstrata est, Professores Mathematici, primò nostrates simul atq; apparuit, magno conatu irati oppugnaverunt, consentientibus etiam & laudantibus cæteris. Sed quibus armis, quibus innisi Principiis? Illis quæ supra ostendi esse absurda; nempe, *Si linea multiplicetur per numerum, Factum esse numerum quadratorum. Si a numero quadratorum extrahatur Radix quadrata, extractum esse numerum linearum. Si ex numero cuborum extrahatur Radix cubica, extractum numerum esse linearum. Punctum esse nihil; & lineam duci posse quæ nullam habeat latitudinem.*

Qui Propositionem hanc primus exhibuit, demonstravit illam juxta methodum Corollarii proximè præcedentis, hoc modo: Diviso arcu BG bifariam in *c*, duxit Sinum arcus *bc*, quem Sinum duplicavit producens ad *e*. Deinde ductum IG Sinum arcus BG bifariam secuit in *g*; junctasq; *cg*, *e* G productas supposuit ad latus BA productum. Et bisecando rursus arcum B*c* ductoq; Sinu ejus, & diviso I*g* bifariam, atq; eodem modo bisecando quamdiu quantitas bisecari potest, concludebat partes arcûs BG partibus Sinûs IG ubiq; esse proportionales. Id quod & verum est, & ab illo verè illatum. Sequitur autem inde (recta G*e* producta) ad BS in *i* rectam B*i* æqualem esse arcui BG; & proinde totam rectam BS æqualem esse arcui toti BD.

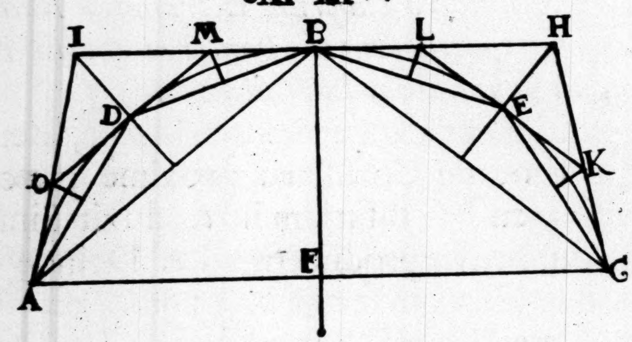
Hoc autem a dictis Professoribus impugnatum est partim ex Tabulis Sinuum, Tangentium, & Secantium, partim ab Authoritate Archimedis. Quoniam autem Tabulæ illæ constructæ sunt per multiplicationem Lineæ per numerum, cujus productum falsò computant pro numero quadratorum; & per extractionem radicum ex illis quadratis, quas radices falsò

 computant

computant pro numero linearum, argumentum ſumptum ex illis Tabulis vim refutandi nullam habent. Et quoniam Archimedes ipſe dimenſionem circuli ſuam demonſtrat per radicum extractionem, authoritas ejus in hac re valere non debet. Neq; mirum eſt, ſi per hujuſmodi calculum, recta *e* G producta cadere videatur in rectam B A productam, ultra vel citra punctum R.

Eandem hanc determinationem magnitudinis arcus B D impugnavit *Chriſtianus Hugenius* ex eo quod ipſe in Libro ſuo quem ediderat de Magnitudine Circuli, demonſtravit ut putat rectam compoſitam ex Radio & Tangente 30 graduum, qualis eſt B S, majorem eſſe arcu quadrantis B D.

CAP XX : 1



Deſcripto enim Segmento Circuli ſemicirculo minore A B C, & diviſo a perpendiculari F B bifariam in B; ſectiſq; rurſus arcubus A B, B C bifariam in D & E; ductiſq; eorum chordis C E, E B, B D, & D A; & Tangentibus C H, B H, B I, I A, & C K, K E, E L, L B, B M, M D, D O, O A; & deinceps biſecando quantum intelligi poteſt, demonſtrat (&

quidem

quidem quantum ego video) rectè ſegmenta C E C, E B E, B D B, D A D minora eſſe triangulis C K E, E L B, B M D, D O A. Quod autem idem infert, Si perpetua biſectione fierent infinita numero Segmenta, Illa quoq; ſimulſumpta minora fore omnibus triangulis, quæ Segmentis reſpondent ſimulſumptis, male infertur, niſi recta I B H ſit extra circulum, ita ut punctum B non ſit ambarum Linearum rectæ & curvæ commune ſed inter utramque. Nam ſi B ſit utriuſq; lineæ commune, omnes illæ Tangentes numero infinitæ conſtituent ipſum arcum A B C. At ſi B ſit extra circulum quamvis ipſi contiguum, chordæ A B, B C ſecabunt circulum non in eodem puncto in quo ſecatur a recta F B, ſed utrobiq; citra ipſum. Docet enim *Euclides* (Prop. 2. Elem. 3.) rectam C B totam eſſe intra circulum, & (Prop. 16. El. 3.) Tangentem eſſe totam extra circulum. Itaq; nulla recta præter F B tranſire poteſt per arcum & tangentem ad idem punctum B, nempe ad punctum quod vocant *Contactus* niſi utriq; lineæ attribuatur latitudo aliqua.

Itaq; falsò uſus principio hoc, *Punctum eſſe nihil*, poſt multas demonſtrationes intulit, *Differentiam inter tertiam partem arcus quadrantis & chordam, ad differentiam inter chordam ejuſdem tertiæ partis, & Sinum ejus* (ſive Semiradium circuli) *majorem habere rationem quam* 4 *ad* 3; quod non parum confirmat id quod refutare voluit; quod autem intulit rectam compoſitam a Radio & Tangente 30 graduum majorem eſſe arcu quadrantis, deceptus fecit, eo quod putaret radium circuli non minorem eſſe quam quæ ab eodem centro ad Tangentem ducitur quæ eſt extra circulum. Conſule ipſum illius librum cujus mihi exemplar dum hæc ſcribo deeſt; nec, ſi adeſſet, demonſtrationes ejus commodè hic tranſcriberentur.

Cap. XXII.

De Sectione Anguli.

Revertere ad Diagramma Capitis xx.

In illo Diagrammate, ſit datus arcus triſariam ſecandus B a.

A puncto R ducatur recta Rα ſecans AD in β, & BC in γ. Secetur Bγ trifariam in δ & ε; ducanturque rectæ Rδ, & Rε ſecantes arcum Bα in η & ζ, & Aβ in θ & λ:

Dico arcum Bα diviſum eſſe trifariam a duabus rectis Rη, Rζ.

Nam propter parallelas Bγ, Aβ, diviſa eſt etiam Aβ trifariam in η & λ ab iiſdem rectis Rδ; Rε. Eſt autem Aβ ad totam AD ut arcus quadrantis deſcripti intervallo Aβ, ad arcum totum BD deſcriptum intervallo AD.

Etiam arcus quadrantis deſcripti a tertia parte arcus Aβ erit tertia pars Bα.

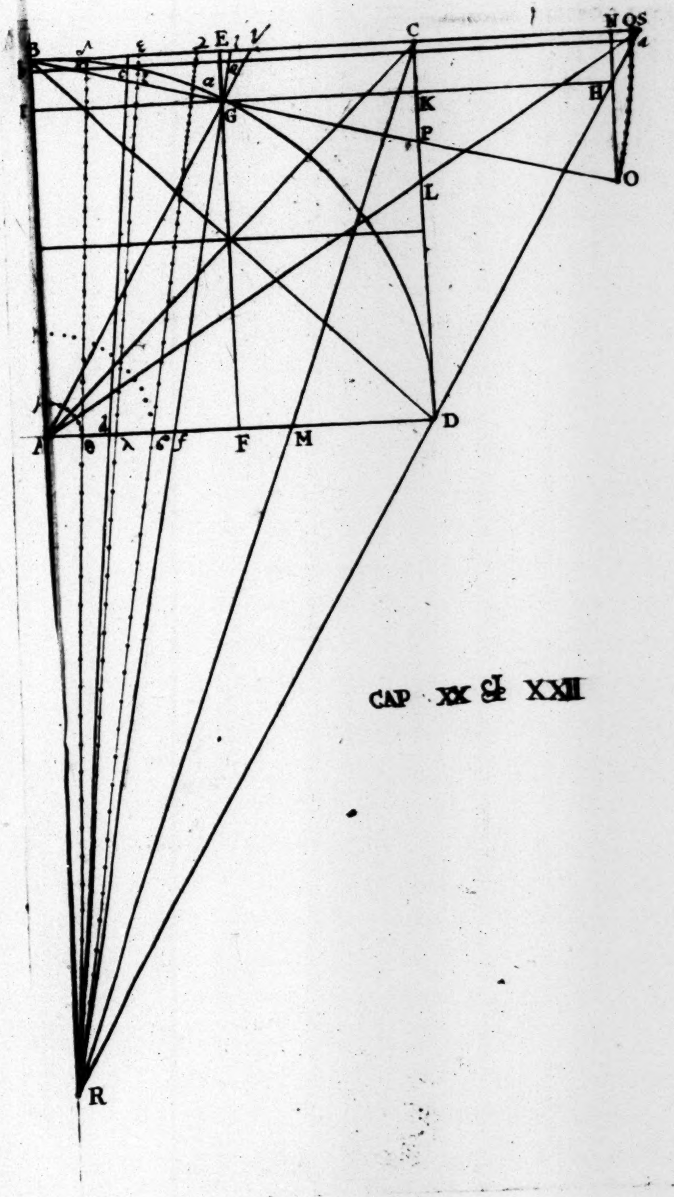
Arcus quadrantis deſcripti ab Aθ ſit $\theta\mu$; arcus autem quadrantis deſcripti ab Aβ ſit $\beta\nu$.

Non differunt ergo arcus duo $\beta\nu$ & Bα inter ſe longitudine, ſed curvedine tantum, cum ſit Bα, minus $\beta\gamma$ magis curva. Idem dicendum eſt de arcu $\theta\mu$ & cæteris omnibus arcubus deſcriptis ſuper $\theta\lambda$, $\lambda\beta$ & cæteris arcubus qui adhuc deſcriberentur ſuper harum æqualibus partibus comparatis, cum partibus ſimilibus circumferentiæ Bα.

Intellige jam puncta α & β admota eſſe in lineis AB & $\beta\alpha$ ad β et α, & proinde arcum $\beta\nu$ jacere in Bα. Congrueret ergo cum arcu ipſo Bα, ſi modo omnia puncta θ, λ, & omnes partes harum æquales ferrentur ſimul in ſuis quæq; lineis ductis ab R donec pervenirent ad arcum Bγ. Neceſſe enim eſſet ſi Aβ & Bα diviſa eſſent in partes æquales in quot poſſibile eſt eas dividi, ut ſingulæ abſcinderent partem arcus Bα æqualem quadranti ſuper ſe deſcripto. Quare etiam recta Rθ abſcindit ab arcu Bα tertiam partem arcus Bα nempe Bη; & Rλ duas tertias ejuſdem.

Eſt ergo arcus Bα datus diviſus trifariam a rectis Rδ, Rε. Eodem modo poteſt arcus non major quam arcus BG dividi quinquifariam vel in ratione quacunq; data. Sicut etiam arcus major quam BG ſi biſecetur donec pars ejus minor ſit quam BG; nempe partem inventam duplicando toties quoties datus biſectus fuerat.

Angulum ergo in ratione data diviſimus, & propterea etiam proportionem datam dividere docuimus in partes æquales quotcunq; requirentur. Idq; methodo brevi & perſpicua.



CAP XX & XXII

Si jam rectæ MG, MQ sunt æquales, manifestum est æqua-
les

A puncto R ducatur recta R α secans AD in β, & BC in γ. Secetu[r] R γ trifariam in δ & ε; ducanturque rectæ R δ, & R ε …

… quotcunq; requirentur. Idq; methodo brevi & perspicua.

Cap. XXIII.

De Quantitate rectæ compositæ ex Radio Circuli & Tangente 30. graduum. Item, Dubitatio super Prop. 47ª. Elementi primi, &c.

QUadratum rectæ compositæ ex Radio Circuli & Tangente arcus 30 graduum, est ad quadratum a Radio, ut decem ad quatuor.

Sit Radius circuli AB, cujus quadratum sit ABCD. Ducatur arcuus BD, qui est quadrans circuli descripti ab AB.

Secetur quadratum ABCD in quatuor quadrata æqualia a rectis EF, GH secantibus se mutuò in I. Secet autem GH arcuum BD in K, jungaturq; recta AK, producaturq; ad BC in L, erit BL Tangens 30 graduum.

Rectæ BL adjiciatur in directum LM æqualis BC. Erit ergo tota BM composita ex BC Radio Circuli & CM Tangente 30 graduum.

In CM sumatur CN æqualis semiradio BG. Producatur AD ad *y*, ita ut A*y* sit æqualis BN; jungaturq; N*y* quam secet EF producta in P; jungaturq; BP secans GH in V.

Est ergo (per Prop.4. El. 1.) quadratum a BP decuplum quadrati ab NP. Est autem quadratum a Radio AB quadruplum, quadrati ab NP; & propterea quadratum a BP est ad quadratum ab AB ut 10 ad 4. Probandum ergo est, rectas BP, BM esse æquales.

Ducatur MQ parallela NP secans BP productam in Q, & EP productam in R. Erit ergo NMRP rectangulum. Ducatur a puncto M ad BP perpendicularis MO quæ producta incidat in EP ad S.

Sunt ergo triangula BNP, BOM Similia. Nam anguli ad N & O sunt recti æquales, & angulus ad B communis. Quare etiam anguli BMO, BPN sunt æquales.

Si jam rectæ MS, MQ sunt æquales, manifestum est æquales

les quoq; esse inter se tum R S, O Q, tum etiam M O, M R, & præterea B O, B N; & per consequens, quadratum a B M ad quadratum a B C ut 10 ad 4. Quod est propositum.

Sumatur in B M pars ipsius tertia $B\alpha$, quod fiet sumendo $G\alpha$ tertiam partem rectæ G L. Radio autem $B\alpha$ describatur arcus circuli secans rectam G V alicubi, & quidem (sensu judice) in ipso puncto V.

Rursus duplicato $B\alpha$, ut fiat $B\beta$ duæ tertiæ rectæ B M; & radio $B\beta$ describatur arcus circuli secans C D in γ; iterum (sensu judice) punctum γ erit in intersectione rectarum B P, C D. Postremò radio tota B M descriptus arcus circuli transibit per punctum P. Unde judicio sensuum tertia pars rectæ B P æqualis erit tertiæ parti rectæ B M, & proinde tota B P æqualis toti B M.

Sed hæc (inquies) non sensuum sed rationis judicio determinanda sunt. Rectè dicis; itaq; ne videar severitatem disciplinarum corrumpere velle, conabimur rem demonstrare.

In duobus triangulis similibus, si latus unum primi majus vel minus fuerit quam latus homologum secundi, etiam reliqua duo latera ejusdem primi majora vel minora erunt reliquis homologis secundi utrumq; utroq;. Id quod per se satis manifestum est.

In triangulo ergo M S R (cui simile est triangulum M Q O) supponamus latus M S, latere sibi homologo M Q minus esse. Erit ergo & M O ~~minus~~ quam M R.

+ maius.

Rursus quia M S minus est quam M Q latus sibi homologum, erit & R S (trianguli M S R) minus quam latus sibi homologum Q O. Sed latus R S æquale est tertiæ parti semiradii B G, quia triangulorum similium B G V, M R S latera homologa B G, M R sunt semiradii æquales, & latus G V tertia pars semiradii B G. Minor autem est R S quam O Q.

Est ergo O Q major quam tertia pars semiradii M R.

Sed O Q est tertia pars (ut supra ostensum est rectæ M O. Major ergo est M O quam semiradius, id est quam M R. Sed ex eo quod suppositum est minorem esse M S quam M Q, illatum

illatum est, majorem esse M O quam M R. Falsum ergo est M S minorem esse quam M Q.

Eadem methodo demonstrari potest eandem M S majorem non esse quam M Q.

Sunt ergo M S, M Q æquales.

Est autem M Q æqualis tertiæ parti B M. Est autem M S (propter triangula B G V, M R S æqualia & similia) æqualis B V tertiæ parti B P. Itaq; B M, B P sunt æquales; & quadratum a B M ad quadratum a B C ut 10 ad 4. Quod erat demonstrandum. Nec in veritate Theorematis sensus & ratio dissentiunt.

Corollarium hinc oritur manifestum, rectas B N, B O, ut & O P, P R, item P S, P Q esse inter se æquales; & esse B Q, B P, B O id est B *e* (facta æquali B Q) B M, B N continuè proportionales, & N O, M P esse parallelas; & angulos N O P, O M P, N P M, P M R esse omnes inter se æquales; & deniq; facto angulo N M *n* æquali angulo O P S, parallelas esse B P, M N æquè altas.

Ex propositione hac modò demonstrata sequitur Theorema novum circa dimensionem circuli, nempe hoc, *Arcum quadrantis descripti semidiametro B M æqualem esse quinq; semiradiis; arcum autem quadrantis cujusdam qui sit æqualis rectæ AB descriptum esse a semidiametro quæ est media proportionalis inter AB sive CD, & ejusdem duas quintas.*

Secetur enim A D (quæ æqualis est Radio) in quinq; partes æquales, quibus adjiciantur in directum aliæ duæ quintæ D *a*, *a b*. Divisa autem A *b* bifariam in *c* describatur semicirculus secans C D in *d*. Est ergo ut $\frac{2}{5}$ Radii A D ad D *d*, ita D *d*, ad Radium A B. Sed ut $\frac{2}{5}$ Radii A B ad mediam B *d*, ita sunt duo semiradii, id est A B, ad mediam inter A B & quinq; semiradios. Est autem B M (ut modo demonstratum est) media inter A B & quinq; semiradios. Sunt ergo D *b*, D *d*, D C, B M & quintuplus semiradius continuè proportionales. Ducta ergo A *d* & producta incidet in M, propterea quod est ut M B ad B A, ita B A id est A D ad D *d*. Quoniam ergo demonstratum est Cap. xx. & defensum Cap. xxi. contra Hugenium (qui problema hoc profundissi-

mè contemplatus, & ex Principiis Euclidis accuratissimè ratiocinatus est) rectam B M æqualem esse arcui B D, eandemq; modo ostendi æqualem esse Mediæ inter A B & quinq; semisses ejusdem A B, sequitur (propterea quod A B est radius quadrantis æqualis rectæ B M) rectam D *d* esse Radium quadrantis æqualis A B; & duas quintas Radii A B, nempe D *b*, esse Radium quadrantis D *d*; & deniq; rectam B M esse Radium quadrantis æqualis quintuplæ C N, id est quintuplo semiradio. Unde exsurgit etiam, Rectam D *d* æqualem esse duabus quintis arcus B D. Quæ omnia vidit quidem & edidit Josephus Scaliger, sed cum non rectè demonstrasset, damnavit ipse (nil dubitans de Principiis Euclidis) sed postquam fuisset convitiis Clavii acerbissimis oneratus.

Consideremus nunc eadem hæc in Numeris. Ad B M adjiciatur M *e* æqualis P Q; eritq; N *e* æqualis O Q, id est G V, id est tertiæ parti semiradii B G; semissis autem rectæ N *e* (qui sit N *r*) erit sexta pars ejusdem B G.

Erit ergo quadratum a B G æquale 36 quadratis ab N *r*. Est autem recta B N octodecupla ipsius N *r*, & proinde quadratum ejus æquale 324 quadratis ab eadem N *r*. Est autem B *e* vigecupla ejusdem N *r*, & proinde quadratum ejus æquale 4000. quadratis ab eadem N *r*.

Est autem B *r* æqualis novemdecem rectis N *r*; & quadratum ejus æquale 361 quadratis ab eadem N *r*. Majus ergo est quadratum rectæ B *r*. quam quadratum rectæ BP sive BM. Quadratum enim a B P æquale est tantummodo 360 quadratis ad N *r*.

Inter quadrata a B *e*, & B M, id est inter 400 & 324 sumatur numerus medius proportionalis (cadit enim inter quoslibet duos numeros quadratos unus medius proportionalis) eritq; ille numerus medius 360, nempe tot quadrata a sexta parte B G, quot sunt æqualia decem quadratis a semiradio toto B G. Itaq; si Gnomon circumponi intelligatur quadrato a B M, cujus Gnomonis latitudo sit M *r*, Gnomon ille æqualis erit quadrato ab N *r* sexta parte semiradii. Hactenus nulla causa est dubitandi de Prop. 47. El. 1.

Rursus quadratum a C N æquale est 36 quadratis ab N *r*. Est autem C *e* octupla ipsius N *r*, & quadratum ejus æquale

64 quadratis

64 quadratis ab eadem N*r*. Et quia C*r* ſeptupla eſt ipſius N*r*, quadratum ejus æquale erit 49 quadratis ab eadem N*r*.

Jam cum CM Tangens ſit 30 graduum, erit quadratum ejus (ſecundum Prop. 47. El. 1.) æquale 48 quadratis ab N*r*. Eſt enim AL ſecans 30 graduum dupla Tangentis BL, ſive CM, & AB radius duplus ſemiradii BG. Cum ergo quadratum ab AL ſit ad quadratum a BL ut 4 ad 1, erit ad quadratum ab AB ut 4 ad 3. Quare etiam quadratum Tangentis BL erit ad quadratum ſemiradii BG ut 4 ad 3 ſive 48 ad 36. Sed quia quadratum a BG ſive CN eſt 36, erit quadratum a BL, ſive CM (ſecundum Euclidem) æquale 48 quadratis ab N*r*. Eſt autem quadratum a C*r* 49, quare ſi Gnomon cujus latitudo ſit M*r* circumponeretur quadrato a CM, eſſet ille Gnomon æqualis quadrato ipſius N*r*. Sed oſtenſum eſt quod Gnomon cujus latitudo ſit M*r* circumpoſitus quadrato a BM æqualis eſt quadrato ab eadem N*r*. Non eſt ergo quadratum a Tangente 30 graduum ad quadratum a Semiradio ut 4 ad 3. Quod eſt contra Prop. 4. El. 1. Non videtur ergo propoſitio illa univerſaliter vera, ſed dubitans nil pronuntio.

Error eſt, inquies, aliquis vel in illa, vel in hac demonſtratione. Certiſſimè. Incumbe igitur toto animo utriuſq; examinationi; nec ratiocinationes tantum ſed etiam Principia excute. Inprimis autem cave ne tenuiſſima triangula vel ſectores quantuloſcunq; computes pro lineis rectis, aut parallelogramma obliquangula exigua pro rectangulis. Id quod evitare non poteſt is qui rectangulum non quadratum ſectum putet a linea per angulos oppoſitos bifariam, ut eſt in Propoſitione 34 El. 1. quanquam enim in quadrato diagonalis conſiderari poteſt ut mera longitudo, atq; etiam ut minutiſſimum rectangulum, quia dividit oppoſitos angulos bifariam; in oblongo tamen ubi diagonalis non dividit oppoſitos angulos bifariam conſiderari non poteſt neq; ut rectangulum neq; ut mera longitudo ſed ut vel triangulum obliquamgulum, vel parallelogrammum obliquangulum. Sed ut hanc difficultatem facilius examinare poſſis, oſtendam tibi nunc quanto juxta *Euclidem* quadratum a Tangente 30 graduum majus eſt quam quadratum a ſemiradio.

 Dico

Dico autem quadratum a Tangente 30. graduum nimirum quadratum a CM æquale esse quadrato a CN una cum tertia ipsius parte & duobus quadratis ab NM sive PR. Tangentis & Semiradii differentia, si vera sit Prop. 47. El. primi.

Super CM constituatur quadratum CMYX. Item super BM constituatur quadratum BMZ*f*. Etiam super CN constituatur quadratum BN*gk*. Erit ergo tum PY, tum *g*Z quadratum differentiæ inter CM Tangentem 30. grad. & semiradium CN.

Constat autem quadratum N*h* æquale est novem quadratis a Semiradio CN. Quod autem quadratum B*f* æquale est decem quadratis a CN supra demonstratum est.

Est ergo Gnomon qui quadrato N*h* appositus est æqualis quadrato NF. Differentia autem inter quadratum MX & NF est Gnomon constans ex duplo rectangulo MP & quadrato PY, cui æquale est quadratum *g*Z.

Gnomon autem qui adjectus est quadrato N*h* æqualis est sextuplo rectangulo MP una cum quadrato *g*Z. Est autem Gnomon ille æqualis quadrato Semiradii. Minus ergo est quadratum Semiradii quam quadratum Tangentis 30 grad. tertia sui & præterea tanto quantum est duplum quadratum a PY vel *g*Z.

Excessus ergo quadrati Tangentis 30 graduum supra quadratum Semiradii majus est quam tertia pars quadrati Semiradii, tanto quantum est duplum quadratum PY. Quod est contra Prop. 47. El. 1.

Error autem hic in quadratis ipsis, ut vides, satis est sensibilis, etsi in lateribus non tam facile apparet. Apparebit autem si ad $\frac{4}{6}$ rectæ BG addideris in directum Radium totum, sive $\frac{12}{6}$, atq; inter illas mediam inveneris proportionalem. Nam erit illa quidem non valdè diversa a Tangente, sed tamen si cum diligentia operabere media illa minor erit quam Tangens 30 grad. nimirum quam BL; est tamen illa media, latus verum, quadrati æqualis 48 quadratis a sexta parte BG, nimirum ab N*r*.

Verum error ille an magnus an parvus sit, nihil hic refert. Nam etsi nullus esset, cum tamen propositio illa (propter

Principia

Principia quibus innititur, quæ sunt ut suprà ostendi dubiæ fidei etiam ipsa dubia est. Itaquè temerè dictum est a Clavio ad Prop. 16. El. 3. contra Pelletarium, *Geometricas* (id est Geometrarum) *demonstrationes ejusmodi esse ut consensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloq; modo quempiam sinant ancipiti opinione distrahi, sic, ut tum assentiatur si velit, tum si nolit dissentiat.*

Si circulus vel triangulum sectum fuerit in quatuor partes, quæ partes dispersæ essent, una ad Indos Orientales, altera ad Indos Occidentales, tertia ad Polum Arcticum, quarta ad Antarcticum, putasne esse demonstrationem Geometricam aliquam quæ me cogere posset ut credam, puncta eorum verticalia non esse quatuor puncta, sed unum idemq; punctum. Item si quid moveatur motu æquabili per Minus & Majus spatium, extorquebitne demonstratio ulla ut credam quod non transeat per æquale, aut ut credam vera esse quæ supra ostendi esse absurda.

Si mea hæc rectè demonstrata sunt, animadvertenda tibi præterea sunt, primo, maximam partem propositionum quæ dependent a 47ª. El. 1. (sunt autem multæ) nondum esse demonstratam.

Secundo. Tabulas Sinuum, Tangentium, & Secantium egregiè falsas esse; propterea quod calculus eorum dependet a veritate horum duorum Assumptorum, 1. *Radix numeri quadratorum non est numerus quadratorum sed linearum.* 2. *Numerum Linearum per numerum(simpliciter) multiplicatum facere numerum quadratorum.* Cum enim quadratum a recta composita ex Radio & Tangente 30 grad. æquale sit decem quadratis a semiradio; si ponatur Semiradius 5000, erunt tres Semiradii 15000 pro B N. Quadratum autem a Semiradio est 25000000, & quadratum a B N 225000000 quæ duo quadrata simul sumpta sunt 250000000, cui æquale est quadratum a B M composita ex Radio & Tangente 30 grad. Radix autem numeri 250000000 est 15811---quarum partium Radius est 10000. Relinquitur ergo pro Tangente 30 grad. 5811----proximè. Est autem in Tabulis Tangentium pro ejus quantitate positus numerus 5773----, qui est error momenti satis magni in calculi,

culis Astronomicis, & in calculo triangulorum quo utuntur Agrimensores. Iisdem principiis quæ ostendi supra esse falsa attribuere potes, quod quantitas circuli a magnis ingeniis omni ævo, quæsitum, inveniri tamen non potuerit. Quis enim præjudicium Archimedis non vereretur? Etsi liber ejus de Dimensione circuli non mihi videatur ab ipso editus; continet enim tres tantum propositiones, nec eas ordine quo oportuit dispositos, nec sicut alii ejus libri ad quenquam qui eos consideraret missus, sed ut cui nondum manum ultimam imposuerat apud se retentus, ab aliis Geometriæ minùs peritis post mortem ejus editus.

Doctrina autem & ipsa nomina Sinuum, Tangentium & Secantium calamitas Geometriæ nupera est. Qui subtensas & semisubtensas quæ nunc vocantur dimidiatorum arcuum Sinus, calculo primus subjecit fuit Ptolomæus. Sinum nusquam Scriptum invenio ante Regiomontanum, qui verò Tabulas Sinuum, Tangentium, & Secantium quibus utimur primus condidit fuit Clavius.

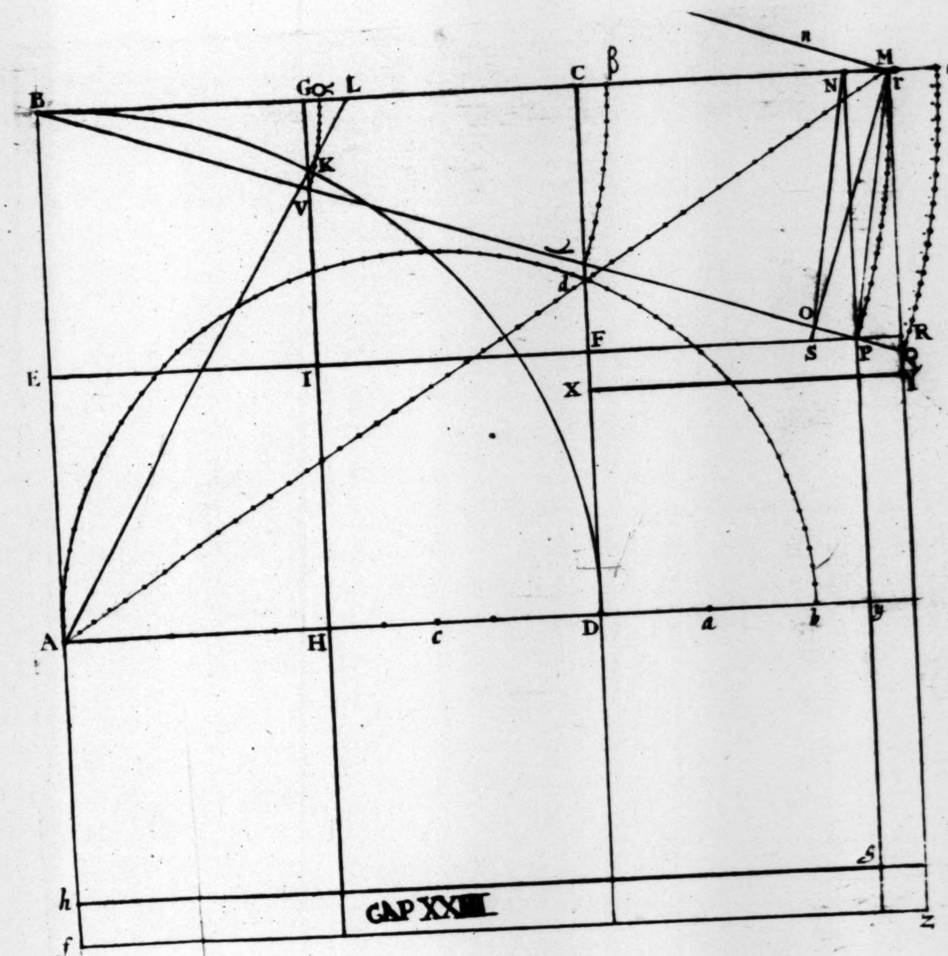
Secundo, notatu dignum est, causam quod Quadratura circuli, divisio Rationis, aliaq; pulcherrima, sed difficillima Geometriæ problemata tam diu latuerunt, in illis ipsis esse demonstrationibus quas cogentes esse prædicant. Primi omnium Arabes invenerunt quadratum quadrantis perimetri decuplum esse quadrati a Semiradio; quod etsi verissimum sit, confutavit per extractionem Radicum Johannes Regiomontanus (qui idem esse putavit quadrati latus & numeri quadrati Radicem) Audi ipsum Regiomontanum, *Arabes olim circulum quadrare polliciti ubi circumferentiæ suæ æqualem rectam descripsissent, hanc pronuntiavere sententiam, Si circuli diameter fuerit ut unum, circumferentia ejus erit ut Radix de Decem. Quæ sententia cum sit erronea, quemadmodum alibi explanavimus, cumq; numeros introducat rectilineationem effecturos, numeri ipsi in hoc negotio sunt suspecti.* Olim ergo, ut vides, magnitudo circuli cognita fuisset, nisi obstitissent quæ a Geometris nunc Cogentia appellantur. Iterum doctrina hæc Arabum apparuit a Scaligero, atq; iterum disparuit expulsa exorcismo convitiorum a Clavio. Sed tertium nunc apparens, docta jam exorcismos &

convitia

convitia contemnere, nunquam puto abigetur.

Notabis præterea convitiorum causas. Quod Scaligerum Clavius, Orontium & Longomontanum alii, convitiati sunt, quæ causa esse potuit? Quo læsi fecerunt? Paralogismus meus damnum tuum non est. Unde igitur iræ tantæ? An a zelo boni communis, nimirum ne corrumperetur paulatim Mathematica? Utinam quidem illis omnibus cura Boni communis tanta esset, ut nihil omnino in libris falsi paterentur esse sine confutatione. Sed ita est homo, nisi præcepta vera Philosophiæ moralis antè didicerit, ut famam aut lucrum primariò, Veritatem secundariò appetat. Inde est quod irascantur illis quorum industria nimia veritatis lux infertur, qua patescat omnibus quantuli viri sunt qui volunt haberi maximi. Ego aliqua quidem in *Euclide* reprehendi, non tamen ut illum non putem magni faciendum esse, qui Scientiarum Mathematicarum tradendarum methodum primus tradidit. Nihil ab Archimede editum non laudo. Consilium mihi aliud non est quam Arithmeticæ & Algebræ in demonstrandis Propositionibus purè Geometricis abusum tollere, si potuero. Vale.

FINIS.



cu[illegible] & rectæ B D, *a b*, E F continue proportionales.

Centro N radio N B deſcribatur arcus circuli B G ſecans

Appendix.

Cum in fine Capitis 22 Ex data Anguli omnimoda, ſectione, Diviſionem etiam Rationis omnimodam inveniri præſumpſerim, id nunc qui fiat oſtenſurus ſum.

De Mediis Proportionalibus in genere.

Inter duas rectas datas invenire Medias Proportionales quotcunq;.

SInt primo inveniendæ duæ Mediæ inter datas (in fig. 1.) quaſcunq; A B majorem, & A V minorem.

Fiat ab A B quadratum A B C D; & in lateribus A B, A D, ſumantur A E, A F, utraq; æqualis A V.

Inter A B & A E inveniatur media A *a*; cui æqualis in latere A D ſumatur A *b*, ducaturq; *a b*, quam ducta diagonalis A C neceſſariò ſecabit bifariam, & ad angulos rectos in *d*.

Ducatur etiam diagonalis B D ſecans A C in N. Itaq; A C, B D ſecabunt ſe mutuò bifariam, & ad angulos rectos in N.

Jungantur D *a*, *b* E, ducaturq; E F ſecans A C in *o*; eruntq; A N, A *d*, A *o* continuè proportionales, in eadem ratione cum rectis A B, A *a*, A E, ſive A D, A *b*, A F, & rectæ B D, *a b*, E F continuè proportionales.

Centro N radio N B deſcribatur arcus circuli B G ſecans

Da productam in G; item centro d, radio $d\,a$, describatur arcus circuli ag secans bE productam in g, ducaturq; dg.

Quoniam ergo est ut AD ad Aa, ita Aa id est Ab, ad AE, erunt Da, bE parallelæ, & anguli BDa, Dab, abE æquales; & per consequens anguli BNG, adg, (dupli angulorum BDa, abg) inter se æquales.

Secetur arcus BG in tres partes æquales, quarum BH sint duæ; jungaturq; DH secans latus AB in I. Ducta ergo NH, erit angulus BNH duplus anguli BDH, id est duplus anguli BDI.

Rectæ AI sumatur (in latere AD) æqualis AK, ducaturq; BK.

Quoniam igitur æquales inter se sunt tam AB, AD quam AI, AK, erunt quoq; inter se æquales DI, BK & secabunt se mutuò in diagonali AC ad P; eruntq; tum DP, PB, tum KP, PI æquales; & ducta IK erit parallela rectis BD, ab, EF. Quatuor denique anguli BDI, DBK, DIK, BKI erunt æquales, & eorum quilibet æqualis duabus tertiis anguli BDa.

Similiter secetur arcus ag in tres partes æquales, quarum gh, sint duæ, & ha una, jungaturq; dh secans AB in M, & ducatur bM. Angulus ergo adh in centro, qui (idem est cum angulo adM) duplus est anguli abM in circumferentia.

Rectæ AM sumatur (in latere AD) æqualis AL. Jungatur dL; quæ erit ipsi dM æqualis. Ducatur aL. Cum autem (propter tum Aa, Ab, tum AM, AL æquales) æquales quoq; sint aL, bM, illæ secabunt se mutuò in diagonali AC ad e; eruntq; anguli baL, abM æquales.

Ducatur ML; quæ (propter AL, AM æquales) erit rectæ ab parallela. Quia autem bM, aL secant se mutuò in e, erunt quatuor anguli abM, baL, bML, aLM æquales, & quilibet eorum semissis anguli adM, & duo anguli aLM, bML, id est totus angulus dML, sive ipsi æqualis dLM æqualis tertiæ parti anguli adg, id est æqualis duabus tertiis anguli abE, sive anguli BDa, id est æqualis angulo

BKI

B K I vel D I K, Et quia rectæ *a b*, M L sunt parallelæ, erit etiam angulus *a d* M æqualis eidem angulo D I K sive B K I.

Producatur L *d* utcunq; ad *f*. Erit ergo angulus *f d* M externus æqualis ambobus simul angulis internis *d* L M, *d* M L, Angulus ergo *f d* M duplus est anguli *a d* M, dividiturq; angulus *f d* M a recta *d a* bifariam. Ducatur P *m* dividens angulum B P I bifariam, & secans A B in *m*. Cum igitur angulus B P I duplus sit anguli P K I, erit angulus *m* P I æqualis angulo *f d a*, & angulus *m* P *d* rectus; & rectæ P *m*, *d a* parallelæ, & proinde anguli I P *d*, *f d* P æquales. Quoniam igitur I K secat P *d* ad angulos rectos, producta L *f* incidet in I. Similiter ostendi potest rectam M *d* productam transire per K.

Est ergo quadrilaterum I P K *d* I Rhombus.

Jungantur M F & L E, quæ quia sunt æquales secabunt se mutuò in diagonali ad *n*. Et parallelæ sunt tum D *a*, *b* E, tum D B, M L; tum etiam I K, E F; erit ergo angulus *b* E L æqualis angulo I D *a*; & anguli L E F, L M F æquales duobus angulis B D I, D B K, id est duobus augulis I L M, K M L uterq; utriq;.

Est ergo quadrilaterum M *d* L *n* M Rhombus.

Sunt ergo P B, *d* I, *n* M, *n* E continuè proportionales.

Sed ut P B ad P I, id est ad P K, ita est A B ad A K, id est ad A I propterea quod recta A P dividit angulum B A K bifariam. Item ut *d* I ad *n* M id est ad *d* L, ita est A I ad A L sive ad A M; quia A *d* dividit angulum I A L bifariam. Item ut *n* M ad *n* E, id est ad F *n*, ita est A M ad A F sive A E; quia A *n* dividit angulum M A F bifariam.

Sunt ergo rectæ A B, A I, A M, A E continuè proportionales, & A I, A M; sive A K, A L Mediæ quæsitæ.

Rursus inter datas quascunq; AB, AV inveniendæ sint quatuor Mediæ. Fiat ab AB (fig. 2.) quadratum A B C D, sumanturq; in lateribus A B, A D partes A E, A F utraq; æqualis minori A V; sumatur autem inter A B, A E media A *a*, cui (in latere A D) sumatur æqualis A *b*, junganturq; D *a*, & *b* E, ducanturq; DB, *ab*, *b* E, EF. Ducatur etiam diagonalis AC secans

 D B,

D B, *a b*, E F, in N, *d*, *o*. Deinde centro N, radio N B describatur arcus circuli secans D *a* productam in G. Secetur autem arcus B G in quinq; partes æquales, quarum B H sint duæ, B Q quatuor.

Item centro *d*, radio *d a*, describatur arcus circuli *a g* secans *b* E productam in *g* seceturq; arcus *g a* in quinq; partes æquales quarum *g h* sint duæ, & *g q* quatuor.

Ducatur D H secans A B in R. Et in latere A D, sumatur A S æqualis A R. Ducanturq; B S, R S; eruntq; D R, B S æquales; & propterea secabunt se mutuò in diagonali A C ad T, & erunt D B, R S parallelæ; & quatuor anguli N B T, N D T, T R S, T S R æquales, & quilibet eorum æqualis duabus quintis anguli B D G.

A puncto S ducatur S X parallela D R, & a puncto R ducatur R Y parallela B S. Erunt ergo S X, R Y æquales, & secabunt se mutuò in diagonali ad Z. Itaq; quadrilaterum S T R Z S erit Rhombus, junctaq; X Y erit parallela rectis D B, R S, & *a b*; & utervis angulorum Z X Y, Z Y X æqualis erit angulo B D R, id est duabus quintis anguli B D G.

Ducatur *d q* secans A B in M, ducatur etiam *b* M, eritq; angulus *a b* M semissis anguli *a d* M. In latere A D sumatur A L æqualis A M, junganturq; M L & *a* L. Itaq; *b* M, a L, secabunt se mutuò (cum sint æquales) in diagonali A C ad *e*. Quare ambo simul anguli *d* M L, *e* M L, sunt æquales angulo Z X Y.

Et quia *a d*, M L sunt parallelæ, erit angulus *a d* M æqualis angulo *d* M L, id est angulo Z X Y. Jungatur L *d* (quæ æqualis est *d* M) & producatur utcunq; ad *f*. Erit ergo angulus *f d* M duplus anguli *a d* M, id est æqualis angulo B T R sive D T S, sive Y Z S, sive R Z X. Est ergo recta L *f* rectis B S, Z R parallela, & recta *d* M rectis D R, S X parallela. Sunt autem anguli *a d f*, Z X Y æquales, & tum *a b* tum X Y secat A C ad angulos rectos. Sunt ergo anguli *f d* Z, X Z *d* æquales. Quare recta L *f* (quæ transit per *d*) incidet producta in X; & propter eandem rationem producta M *d* incidet in Y. Est ergo quadrilaterum Y Z X *d* Y Rhombus.

A

A puncto M ducatur recta M I parallela L X secans A D in I; item a puncto L ducatur recta L K parallela Y M secans A D in K; quæ duæ M I, L K, cum sint æquales, secabunt se mutuò in diagonali A C ad *m*; quia autem L M secat eandem diagonalem ad angulos rectos, & sunt tum *d* L, *m* M, tum *d* M, *m* L parallelæ, erit quadrilaterum L *d* M *m* L Rhombus.

Postremò jungantur I E, K F quæ (cum sint æquales) secabunt se mutuò in diagonali ad *n*. Quoniam ergo tum I K, D B, tum E F, S R, tum *b* E, D *a* sunt parallelæ, & tam I E, K F, quam B S, D R secant se mutuò in diagonali A C, erunt anguli *n* I K, *n* K I, *n* E F, *n* F E æquales tum inter se, tum angulis T B N, T D N, T R S, T S R & recta F K parallela rectis B S, R Y, X L, M I, sicut & I E parallela rectis D R, S X, Y M, L K.

Est ergo quadrilaterum I *m* K *n* I Rhombus. Quare B T, R Z, X *d*, M *m*, K *n* sunt continuè proportionales; & propter angulum B A S, R A Y, X A L, M A I divisum ab A N bifariam, erunt (per Eucl. 6. 2.) rectæ A B, A R, A X, A M, A K, A E, sicut & A D, A S, A Y, A L, A I, A F continuè proportionales. Itaq; inter duas A B, A V datas inventæ sunt quatuor Mediæ A R, A X, A M, A K, sive A S, A Y, A L, A I.

Ad Mediarum numerum omnem demonstrationes applicare singulas impossibile est. Manifestum autem est, quod, si arcus B G secetur septifariam, inveniri sex Rhombos latera habentes totidem continuè proportionalia, & consequenter sex Medias; quemadmodum ex trisectione inventæ sunt duæ Mediæ, & ex quinquisectione quatuor Mediæ; atq; ita in infinitum pro Mediis numero paribus. Datis autem paribus, omnis Mediarum numerus impar facile innotescit per sumptionem inter singulas proportionales singularum Mediarum. Invenimus ergo Methodum generalem inveniendi inter duas rectas datas Medias quotcunq; per sectionem anguli; quomodo autem angulus in ratione data quacunq; secandus sit docuimus suprà Cap. 22.

Hæc quanquam certa & demonstrata, corruerent tamen si

verum esset, quod Algebristæ nostri dicunt, Radicem numeri quadrati, & figuræ quadratæ latus idem esse.

Examinabimus jam Logicæ quam illi jactitant severitatem.

Vitiosam esse aiunt demonstrationem in quam non ingreditur omne id quod ad constructionem assumitur. Ego contrà, demonstrationem in qua neque propositionem, neq; consequentiam ullam falsam reperio, peccatorum omnium contra Logicam absolvendam censeo. Neque illorum regulam illam utcunque speciosam legisse me memini in Aristotele, neque in alio scriptore logico.

Exhibenda mihi igitur est demonstratio legitima, ubi assumptum aliquod ad constructionem non tamen adhibetur ad demonstrationem. Demonstrabo autem absque trisectione anguli inter rectam datam & ipsius semissem quænam sint Mediæ duæ proportionales.

Sint datæ (fig. 3.) duæ rectæ A D, D V facientes unam rectam A V. Sit autem D V semissis ipsius A D, fiatque a majore A D quadratum A B C D. Inter A D & D V inveniatur Media proportionalis D E, cui in lateribus B C, A D ponatur æqualis A O, & B R; jungaturque R O, & producatur.

Secetur D O bifariam in K; centro autem K intervallo K V describatur circulus V I M X secans C D in X, A D in M, & R O productam in I. Quoniam ergo R O, C D sunt parallelæ, anguli deinceps ad O & D sunt recti, & D K, K O æquales, & proinde etiam O M, D V æquales. Æquales item sunt I K, K X; & I X diameter circuli V I M X, eademque æqualis rectæ M V. Itaque ductis rectis VX, XM, MI, I V erit V I M X rectangulum ; & tres rectæ D M, D X, D V continuè proportionales. Divisis autem M X, I V bifariam in Z & L, ducta Z L transibit per K, & secabit tum M X tum I V ad angulos rectos.

In recta I K sumatur I P æqualis D V, erit ergo reliqua P X æqualis D M, & P K æqualis D K; item L K secabit angulum D K P bifariam.

Producatur C D in G (secans K L in S) ita ut D G, C D sint æquales.

A puncto P ducatur recta P Y perpendicularis rectæ I P, æqualis autem D G junganturq; Y I, G V.

Quoniam ergo I P est æqualis D V, & P Y æqualis D G, & anguli ad P & D recti, erunt Y I, G V æquales, & divisâ Y I bifariam in H, circulus descriptus radio H I transibit per P & Y.

Producta autem Y P transibit per M, eritque P M æqualis D X. Cum enim I P, D V sint æquales, & I M, V X æquales & parallelæ, & in triangulis I P M, X D V anguli ad P & D recti, erunt quoq; P M, D X. æquales. Similiter quia O M, est æqualis D V, & M I, X V. æquales & parallelæ, erit O I æqualis eidem D X, & tota Y M æqualis toti G X.

Secent autem se mutuo P M & O I in Q. Æquales ergo inter se sunt Q I & Q M, æquales item anguli Q M I, Q I M; item anguli O M P, O I P cum æquales sint tum K P, K O, tum K I, K M, tum etiam O Q, P Q, & angulus P M I æqualis angulo D X V, & angulus P I M æqualis X V D, propter similitudinem triangulorum P M I, D X V, & angulus P Q I externus duplus anguli interni P M I vel P I M.

Quoniam autem O Q, D S sunt parallelæ, transibit M Y per S. Est enim angulus K S D æqualis angulo D X V propter K S, X V parallelas; est autem angulus M Q I ejusdem anguli D X V sive K S D duplus. Ubicunque ergo M Y secat D G faciet cum illa angulum anguli K S D duplum. Cum enim anguli ad P & D sint recti, & anguli ad K æquales, atque etiam rectæ D K, K P æquales; producta M P donec concurrat cum K L, faciet cum illa angulum æqualem angulo K S D; id quod fieri potest in unico puncto rectæ K L, nempe S. Quare recta K L dividit angulum P S D, simulque verticalem ipsius Y S G bifariam.

Quia vero æquales inter se sunt tum G D, Y P, tum D S, P S, æquales quoque erunt rectæ G S & Y S. Ducta ergo G Y secabitur a K L productâ bifariam & ad angulos rectos in T.

Cum autem in triangulis T Y S, D X V, anguli ad T & D sint recti, & anguli ad S & X æquales, erit angulus T Y S æqualis angulo X V D.

Jungantur

Jungantur HS, HP, HD. Quoniam ergo in triangulis HPS, HDS, latera PS, DS sunt æqualia, & latus HS commune, erunt quoque latera HP, HD æqualia; & anguli HPS, PHS æquales angulis HDS, DHS uterque utrique. Circulus ergo descriptus radio HP (qui transit per I & Y) transibit etiam per D.

Etiam quia rectæ DK, KP, ut & anguli ad K æquales sunt transibit HS per K; & proinde secabit IV. bifariam & ad angulos rectos in L. Itaque triangula rectangula ILH, VLH sunt æqualia & similia. Quare rectæ IH, HV sunt æquales.

Dividitur ergo recta GH bifariam in H, & circulus descriptus radio HP transit per puncta G, I, P, D, V, Y. Est ergo angulus GYV in semicirculo.

Est igitur tum IGYV, tum GMXY, tum etiam (ut antè ostensum est) IMXV rectangulum.

Itaque triangula rectangula GDM, MDX, XDV similia sunt; & propterea quatuor rectæ DG, DM, DX, DV continuè proportionales, quarum DM, DX sunt Mediæ quæsitæ. Item OR, OV, OI, OM continuè proportionales, quarum OV, OI sunt Mediæ quæsitæ. Item PY, PX, PM, PI continuè proportionales, quarum PX, PM sunt Mediæ quæsitæ.

Cor. Quoniam YX, GM sunt parallelæ & æquales, item GM, VR parallelæ & æquales erunt rectæ VY & XR æquales.

Idem demonstrari potest ex eo ipso, quod recta DE est media proportionalis inter AD & ipsius semissem DV, hoc modo.

Quoniam DC, DE, DF (sive DV) sunt continuè proportionales, erit ut DC ad DE, ita differentia CE ad differentiam EF. Quare ratio DC ad DF duplicata est rationis CE ad EF. Et quia DE est diagonalis quadrati a DF id est quadrati DFrg, erit CE diagonalis quadrati ab EF, id est quadrati C$\gamma\mu h$; cum sint tum EF, Ch, tum hF, CE æquales.

Quoniam autem est ut DC ad DF ita AC ad Ar, erit quoque

quoque ratio AC ad A*r* duplicata rationis CE ad C*h*.

Cum autem Cγμ*h* ſit quadratum tranſibi: AC per ν. Ducta ergo μπ parallela CD, erit ut Cμ ad C*h*, ita DC ad μπ id eſt ad D*h*. Eſt ergo ratio AC ad A*r*, id eſt ratio DC ad DF duplicata rationis DC ad D*h*. Quare (cum D*h*, DM ſint æquales, & DX media proportionalis inter D*h* & DF) erit ut DC ad D*h*, ita D*h* ad DX, & ita DX ad DF. Sunt ergo rurſus rectæ D*h*, DX Mediæ quæſitæ.

Si quis in hac demonſtratione propoſitionem falſam aut non neceſſariam illationem oſtenderit, modo convitiis ſe abſtineat (etſi mihi meus error placere non poteſt) veritati tamen ſtudens non inique feram. Sed ut eo ſolum nomine accuſer, quod poſtquam ad conſtructionem aſſumpſiſſem mediam proportionalem inter extremas, medietate illa non ſum uſus, iniquum eſt. Dicant velim, illa regula a quo Magiſtro Logicæ profecta eſt, ut cum Magiſtro ipſo controverſia mihi ſit. Sin nullius Magiſtri, ſed ſuæ ipſorum prudentiæ dictamen ſit oſtendant eſſe infallibile. Quod dicant ſine exemplo eſſe, nihil moror; quæram enim viciſſim quis fuit ille qui alia methodo duplicationem Cubi demonſtravit. Euclides multas habet in initio Elementorum definitiones, quibus tamen nuſquam utitur. An Definitiones ad demonſtrationes minus neceſſariæ ſunt quam Aſſumpta. Analytici omnes aſſumunt aliquid ignotum (etſi ab ignoto per ſe, notum fieri nihil poteſt) ſed ope aliorum præcognitorum Problemata multa aut ſolvunt aut ſolvi non poſſe demonſtrant. An Verum Poſitum minus valebit, quam pro vero ſuppoſitum dubium? Errant qui ſic ſentiunt; Verum enim, tam ſui quam falſi index eſt, ut a quo nihil niſi verum derivatur.

Sed ne quid omittamus quod Problemati nobili perſpicuitatem allaturum videatur, eandem nunc concluſionem ab eo ipſo demonſtrabimus, quod recta AO æqualis ſumpta ſit rectæ DE, id eſt mediæ proportionali inter extremas AD & DV.

Sumatur (in latere DC) recta DF æqualis DV, & deſcribatur quadratum DF*rg*. Erit autem punctum *r* in diagonali DB.

Deſcribatur quadratum DX*pq*, & erit punctum *p* in eadem diagonali DB.

Describatur quadratum DE*kl*; cujus etiam punctum *k* erit in eadem diagonali DB. Secet autem *lk* producta latus BC in *n*,& rectam X*p* productam in *u*,& rectam F*r* productam in *s*.

Describatur deniq; quadratum DM*ih*, cujus punctum *i* erit in eadem diagonali DB; cujus quidem latus *h i* productum secet *ln* in *o*,& AB in *t*,latus autem M*i* productum secet BC in *m*.

Ostensum autem est tres rectas DM,DX,DV id est M*i*, *qp*, *gr* esse continuè proportionales,item OM, DV,id est OM, *g*A esse æquales, & proinde (dempta communi *g*M) æquales esse AM, & O*g*, id est *ti*, vel *im*, vel F E, & propterea rectam *g* M æqualem esse EC, vel *kn*, vel *os*.

Quoniam jam *lk* media est proportionalis inter *ln*, & *ls*, erunt tres rectæ *ls*, *lk*, *ln* continuè proportionales. Erunt item *gr*, *qp*,M*i*, id est *ls*, *lu*, *lo* continuè proportionales. Est autem utriusque Analogismi eadem Antecedens *ls*. Quare (per Prop.28. Elementi decimi quarti) ratio *ln* ad *lo* duplicata erit rationis *lk* ad *lu*. Sed ut *lk* ad *lu*, ita est M*i* ad *lk*.

Ratio ergo *ln* ad *lo* duplicata est rationis *lo* sive M*i* ad *lk*.

Sed ratio quadrati D*hi*M ad quadratum DE*ki* duplicata est rationis M *i* (id est *lo*) ad *lk*.

Si ergo quadratum D*hi*M intelligatur ductum perpendiculariter in suum latus M*i*, item quadratum DE*kl* perpendiculariter in rectam *ln* æqualem lateri AD, fient duo parallelipipeda quorum latera & altitudines reciprocantur. Quare (per Prop.34. Elementi undecimi)erit cubus a DM (Cubus autem est parallelipipedum) æqualis parallelipipedo cujus basis est æqualis quadrato DE*kl*, altitudo æqualis *ln* sive AD.

Sed quadratum DE*kl* æquale est rectangulo sub AD, DV id est rectangulo MR, parallelipipedum autem sub rectangulo MR ductum in OR æqualem AD, est dimidium Cubi totius a latere AD, id est æquale quatuor Cubis a latere DV. Itaq; recta DM est Mediarum duarum inter AD, DV major, & cætera. Quod erat demonstrandum.

Ostendam jam rectam DO semissem esse Tangentis 30 graduum. Secet RO rectam E*k* in *y*; eritq; O*y* sinus 45 graduum. Itaq; utraq; rectarum A*y*, D*k* æqualis erit AB, videlicet lateri totius quadrati ABCD. Circulus ergo descriptus Radio DC

transibit

transsibit per k, & circulus descriptus radio AB transsibit per y.

A puncto y erigatur recta y^z perpendicularis ipsi Ay, secans BC in $^\alpha$, producaturq; $^\alpha y$ ad latus CD in z. Erit ergo triangulum C$^\alpha z$ æquicrurum, & anguli ejus ad $^\alpha$ & z semirecti. Producatur gr ut secet arcum Ck in $^\zeta$, eritque angulus CD$^\zeta$ tertia pars recti. Quare producta D$^\zeta$ faciet cum latere CB angulum æqualem duabus tertiis recti.

Quoniam autem angulus Ry^α est semirectus, & angulus CDc tertia pars recti, faciet D$^\zeta$ producta cum ya angulum anguli recti partem sextam. Sed angulus R$^\alpha y$ qui etiam est semirectus una cum sexta parte recti faciet duas tertias recti. Quare juncta $^\alpha{}^\zeta$ & producta incidet in D, Est ergo C$^\alpha$ Tangens anguli 30 graduum, & huic æqualis Cz. Sed (propter angulum Cy^α rectum divisum bifariam ab Ry) recta Cz dupla est rectæ CR, id est rectæ DO.

Coroll. I. Sequitur hinc rectam Cy sive y^z sive etiam B$^\alpha$ duplam esse rectæ Og sive FE. Quoniam enim DO, Og simul sumptæ æquales sunt semissi lateris AD, erit dupla DO, id est C$^\alpha$, una cum dupla Og æqualis radio toti BC. Cum ergo C$^\alpha$ sit dupla DO, erit residua B$^\alpha$ æqualis duplæ Og sive AM sive Bm.

Cor. 2. Jungatur $g\,y$ producaturq; ad RC in γ. Quoniam ergo Ay dupla est Ag, erit quoq; (propter similitudinem triangulorum Ayg, C$y\gamma$) recta yC dupla Cγ. Itaque Cγ, Bm sunt æquales, & Rγ, quæ est differentia inter CR & Cγ, æqualis differentiæ inter dimidium lateris & Tangentem 30 graduum.

Cor. 3. Dupla ry æqualis est Tangenti 30 graduum, nempe rectæ C$^\alpha$. Nam Ry, yr sunt æquales.

Cor. 4. Semissis circũferentiæ circuli descripti a gr semiradio æqualis est lateribus ambobus Cuborum quorum unus circumscribitur, alter inscribitur eidem sphæræ in qua maximus circulus est qui describitur radio gr semissi lateris AB; quod sic ostendo. Si in quadratorum eorum quæ cubi bases sunt uno quocunq; ducatur diagonalis, erit quadratum ejus duplum quadrati a latere cubi. Rursus, si in termino alterutro illius diagonalis erigatur perpendicularis æqualis cubi lateri, recta

quæ ſubtendit diagonalem, & latus illud cubi erectum, poterit triplum cubi latus. Erit autem illa ſubtendens maxima omnium rectarum quæ intra cubum duci poſſunt; & per conſequens, diameter erit ſphæræ cui cubus inſcribitur. Nam diameter ſphæræ triplum poteſt lateris Cubi in illa ſphæra inſcripti.

Centro r radio gr ſemiſſe lateris AB, deſcribatur circulus $\eta\zeta g$ F, ducaturque $\gamma\pi$ parallela & æqualis CD, ſecans diagonalem AC in μ. Quoniam ergo γm æqualis eſt Tangenti $C\alpha$, ſi jungatur μi, erit illa æqualis eidem $C\alpha$; cujus quadratum eſt $\mu i \nu \lambda$. Quoniam ergo latus DC triplum poteſt rectæ $C\alpha$, ut manifeſtum eſt (ex eo quod ſinus 60 graduum triplum poteſt ſemiradii, & eſt ut ſinus 60 graduum ad ſemiradium, ita radius ad Tangentem 30 graduum erit) cubus cujus quadratum eſt $\mu i \nu \lambda$ inſcriptus in ſphæra cujus maximus circulus eſt $\eta\zeta g$ F. Manifeſtum autem eſt cubum cujus unum quadratum eſt ABCD circumſcriptum eſſe ſphæræ eidem $\eta\zeta g$ F, & oſtenſum eſt rectam compoſitam ex latere AB cubi circumſcripti, & $C\alpha$, id eſt μi lateri cubi inſcripti, æqualem eſſe arcui quadrantis BD, id eſt ſemiſſi circuli $\eta\zeta g$ F.

Poſtremò, Eadem hæc comparemus cum numeris; & (quia radix numeri non ſemper eſt numerus) quadrata ipſa in numeros convertemus.

Producatur BC in δ, ita ut Bδ poſſit decem quadrata a recta DV ſive DF, jungaturq; Aδ, quæ ſecabit DC in X; quod ſic oſtendo.

Quoniam Bδ poteſt decem quadrata a DV, & AB poteſt quatuor quadrata ab eadem DV, erit quadratum a Bδ, 10; quorum quadratum ab AB ſive DC eſt 4; ſive quorum quadratum a Bδ eſt 40, eorum quadratum a DC eſt 16. Eſt autem ut 40 ad 16, ita 16 ad $6\frac{2}{5}$.

Cumque Db oſtenſa ſit ſemiſſis totius Bδ, poterit Db decem quadrata a ſemiſſe ipſius DV, ſive a quarta parte lateris DC.

Quadratum ergo a DC ad quadratum a Db ſive a DM, eſt ut 16 ad 10.

Rurſus, ut 16 ad 10 ita eſt 6, ad 4. Sed quadratum a DF eſt

eſt 4, quorum quadratum a DC eſt 16. Quare latus quadrati 16 eſt ad latus quadrati 10, ut latus quadrati $6\frac{2}{5}$ ad latus quadrati 4. Quare rectæ DC, D*h* : latus quadrati $6\frac{2}{5}$ DF ſunt proportionales.

Sed oſtenſum eſt eſſe ut DC ad D*h*, ita DX ad DF. Latus ergo quadrati $6\frac{2}{5}$ eſt ipſa DX.

Sequitur hinc, Primò rectam DX eſſe mediam proportionalem inter DC, & duas quintas ejuſdem DC. Quadratum enim a DX, nempe DX*pq*, eſt duæ quintæ quadrati a DC, quia $3\frac{1}{5}$ eſt quinta pars 16, & $6\frac{2}{5}$ duæ quintæ ejuſdem quadrati a DC & propterea æquale rectangulo ſub DC & duabus quintis ejuſdem DC.

Sequitur ſecundò, Quod ductâ AX & productâ ad occurſum BC productæ in ʃ, rectam Bʃ poſſe 10 quadrata a DF.

Sequitur tertio, rectam DE (quæ eſt media proportionalis inter DC & DF) mediam quoque eſſe inter D*h* & DX. Cum enim quadratum a D*h* ſit 10, quorum quadratum a DC & 16, & quadratum a DE 8; Si fiat ut 10 ad 8, ita 8 ad tertium erit illud tertium $6\frac{2}{5}$. Unde patet etiam hoc, rationem DF ad DE, eſſe ad rationem DF ad DX ut ſubtriplicata ad ſubduplicatam, ut illi loquuntur; ego autem malim dicere, ut tres rationes minoris ad majus, ad duas rationes minoris item ad majus.

Sequitur quartò, rectam Bʃ eſſe ad DX ut 5 ad 2. Cum enim quadratum a Bʃ ſit ad quadratum a DC ut 40 ad 16, id eſt ut 5 ad 2, & ut quadratum a Bʃ ad quadratum a DC ita ipſa Bʃ (quia quadrata ſunt in duplicata ratione laterum) ad DX erit Bʃ ad DX ut 5 ad 2; & quadratum a Bʃ ad quadratum a DF ut 25 ad $2\frac{1}{2}$ id eſt ut 10 ad 1; & ipſam Bʃ ad DF ut *l.* 10 quadrata ad *l.* 1. Atque hactenus quidem calculi Geometricus & Arithmeticus conſentiunt inter ſe & cum Euclide.

Sunt autem rectæ D*h* (ſive DM) DX, DF (ſive DV) continuè proportionales, propter ſemicirculum MXV. Quare etiam earundem quadrata ſunt continuè proportionalia. Atqui ſi reducantur ad numeros, numeri illi proportionales non erunt. Eſt enim quadratum a D*h*, 10, quorum quadratum a DX eſt $6\frac{2}{5}$, & quadratum a DF, 4. Qui numeri non ſunt proportionales

Reducantur enim ad numeros integros (quod fiet multiplicando ſingulos per 5.) Facti autem erunt 50, 32, 20, qui proportionales non ſunt. Sunt enim 50, 32, $20\frac{24}{50}$ continuè proportionales; quorum minimus eſt juſtò major. Continuè item proportionales ſunt DC, D*b*, DX, quibus reſpondent numeri 16, 10, $6\frac{2}{5}$; qui proportionales non ſunt. Nam reducti ad integros fient 80, 50, 32; qui proportionales non ſunt. Proportionales enim ſunt 80, 50, $31\frac{1}{4}$, quorum minimus eſt juſtò minor.

Unde autem naſcitur hæc Geometriæ & Arithmeticæ diſſentio? Ab eo quod ſubtendens trianguli rectanguli non ſemper poteſt latera duo, angulo recto adjacentia, cum ſubtendens illa non ſit linea, ſed minutum triangulum; cujus ſi punctum verticale computetur pro nihilo, terminus alter erit trianguli minuti baſis.

Cum enim duæ rectæ BA, BC punctum habeant commune B quantitate carens; ſi ab eodem puncto B ducatur tertia recta faciens angulum quemcunq; cum BA vel BC, illa tertia propior erit utrivis duarum BA, BC, quam altera earum alteri; & propterea habebit tertia illa cum utravis priorum plus quam punctum commune, id eſt communem partem. Quare tres illæ rectæ una eademque erunt recta. Item propter eandem cauſam totum circuli planum erit linea recta. Quod ſatis eſt abſurdum.

Recta ergo ſubtendens pro linea haberi non poteſt, niſi quæ ſit diagonalis quadrati. Illa enim dividit angulum rectum bifariam; id quod non facit diagonalis rectanguli non quadrati. Unde neceſſe eſt numerantibus quadrata, (quia minutiſſimi trianguli baſis quantulacunque ea ſit, quantitas tamen eſt) unam & eandem quantitatem ſæpius numerare.

Si denique cubos ipſos per numeros inveſtigare volumus, impoſſibile volumus; quia quadratum multiplicatum per numerum facit ſemper quadrata, quorum nulla multitudo faciet cubum. Cauſa ergo quare problemata illa, metiendi circulum, duplicandi cubum, dividendi Angulum, dividendi Rationem, & alia multa inventa hactenus non fuerint, nulla

aſſignari

assignari potest præter has. 1°, quod ad ea invenienda abusi sunt Arithmetica. 2°. Quod errores antiquorum, recentiores nimium venerati sunt. 3°. Quod qui errores illos conati sunt detegere, eos imperiti homines (ne sua inscitia simul detegeretur) convitiis absterruerunt. Quibus tamen omnibus, propter rei difficultatem, & antiquitatis reverentiam, ignosci potest, præterquam ultimis illis, convitiatoribus, non Geometris, sed insulsis, indignis, Geometriæ procis.

FINIS.

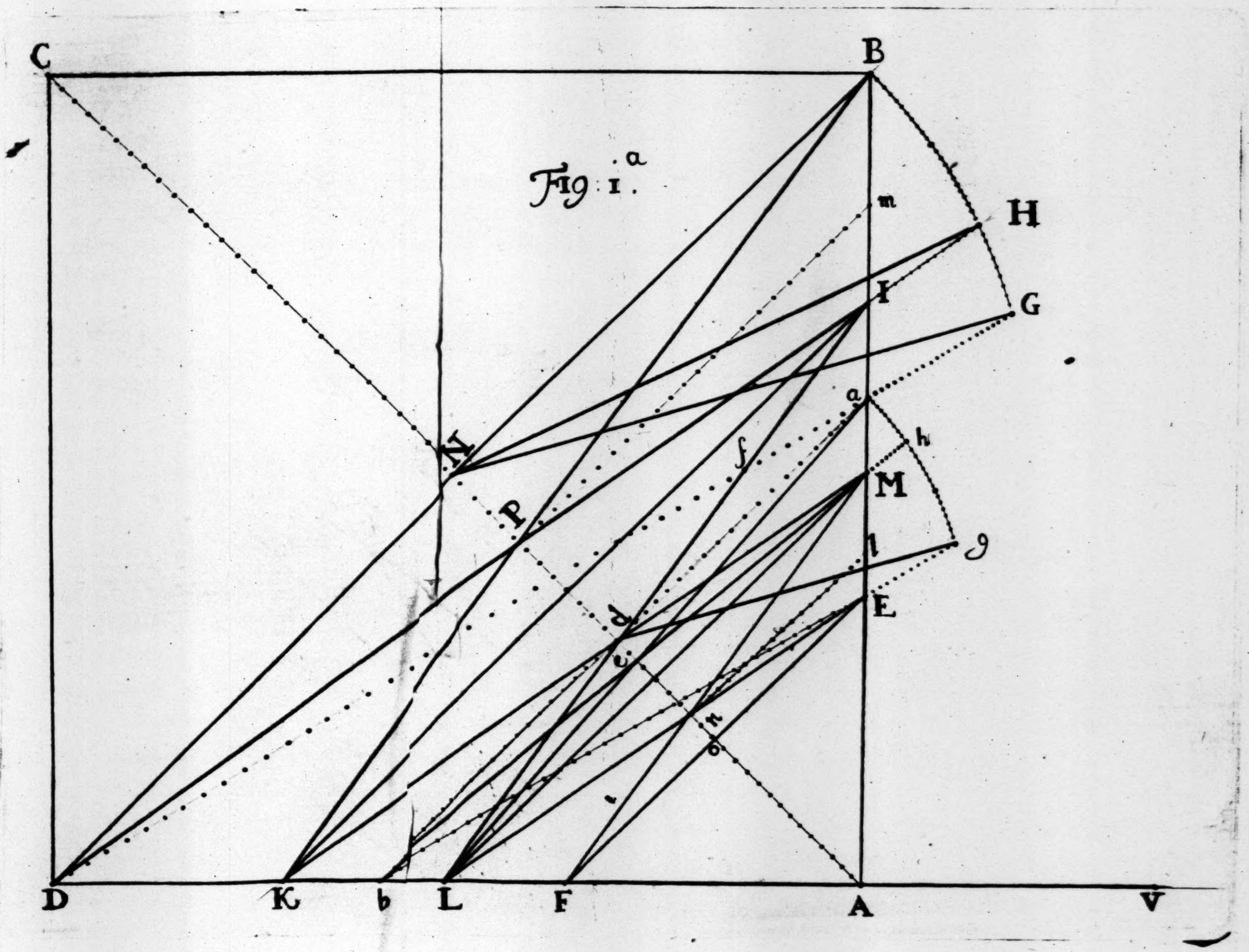


Fig. 1.a

1